

ISSN 2413-6549 (Print)  
ISSN 2518-1785 (Online)

Міністерство освіти і науки України  
Запорізький національний університет

Заснований  
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію  
друкованого засобу масової інформації  
Серія ДК № 5229 від 11 жовтня 2016 р.

**Адреса редакції:**  
вул. Жуковського 66, корп. 1, ауд. 216,  
м. Запоріжжя, Україна, 69060

**Телефон**  
для довідок:  
+38 066 53 57 687

# Вісник

**Запорізького національного  
університету**

**Фізико-математичні науки**

**№ 1, 2021**



Видавничий дім  
«Гельветика»  
2021

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. Запоріжжя: Видавничий дім «Гельветика», 2021. № 1. 118 с.

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Internet вченою радою ЗНУ (протокол засідання № 11 від 23.06.2021 р.)

На підставі Наказу Міністерства освіти і науки України № 886 від 02.07.2020 р. (додаток 4) збірник включено до Переліку наукових фахових видань України категорії «Б» у галузі фізико-математичних наук (113 – Прикладна математика, 121 – Інженерія програмного забезпечення, 122 – Комп'ютерні науки та інформаційні технології).

Журнал індексується в міжнародній наукометричній базі даних Index Copernicus

Статті у виданні перевірені на наявність плагіату за допомогою програмного забезпечення StrikePlagiarism.com від польської компанії Plagiat.pl.

#### **РЕДАКЦІЙНА РАДА:**

**Головний редактор** – Гоменюк С. І., доктор технічних наук, професор

**Відповідальні**

**редактори:**

– Стеганцев Є. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент

– Швидка С. П., кандидат фізико-математичних наук, доцент

#### **РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:**

- Гребенюк С. М. – доктор технічних наук, доцент (Україна)  
Гришак В. З. – доктор технічних наук, професор (Україна)  
Єрмолаєв В. А. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)  
Кеберле Н. Г. – кандидат технічних наук, доцент (Україна)  
Клименко М. І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)  
Козін І. В. – доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)  
Кудін О. В. – кандидат фізико-математичних наук (Україна)  
Панасенко Є. В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)  
Чопоров С. В. – доктор технічних наук, доцент (Україна)  
Шило Г. М. – доктор технічних наук, доцент (Україна)  
Breslavsky I. – PhD in Mechanics, Docent (Канада)  
Djakon R. – Dr.sc.ing., Professor, Academician (Латвія)  
Gerasimov T. – PhD in Mathematics, Docent (Німеччина)  
Kolakowski Z. – Doctor of Science in Engineering, Professor (Польща)

# ЗМІСТ

## РОЗДІЛ I. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

<b>Білий Д. В., Комаров О. В., Лобода В. В.</b> <i>АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМІРНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО КВАЗІКРИСТАЛА З МІЖФАЗНОЮ ТРИЩИНОЮ</i> .....	5
<b>Вакал Л. П., Вакал Є. С., Довгий Б. П.</b> <i>РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА II РОДУ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ</i> .....	15
<b>Gorban I. M., Korolova A. S.</b> <i>NUMERICAL SIMULATION OF A SOLITARY WAVE INTERACTION WITH SUBMERGED OBSTACLES</i> .....	22
<b>Єгошкін Д. І., Гук Н. А.</b> <i>НАЛАШТУВАННЯ ТА НАВЧАННЯ НЕЧІТКОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ЗАДАЧІ КЛАСИФІКАЦІЇ</i> .....	33
<b>Опанасович В. К., Слободян М. С., Білаш О. В.</b> <i>ЧИСТИЙ ЗГИН СМУГИ (БАЛКИ) ІЗ ДВОМА СПІВВІСНИМИ ТРИЩИНАМИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИМИ ДО ЇЇ ОСІ, ОДНА З ЯКИХ ЗНАХОДИТЬСЯ В ЗОНІ СТИСКАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ</i> .....	44
<b>Стеганцева П. Г., Артеменко А. О.</b> <i>РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ЧИСЛА НЕІЗОМОРФНИХ (n,m)-ГРАФІВ</i> .....	51
<b>Stoliarova A. V., Koval R. A., Hatsenko A. V., Dioba N. O.</b> <i>THE DETERMINATION OF THE ELASTIC CONSTANTS OF THE COMPOSITE MATERIAL WITH SOLID AND HOLLOW EQUIVALENTLY DIRECTED FIBERS</i> .....	57
<b>Стреляєв Ю. М.</b> <i>КОНТАКТ ІЗ ЧАСТКОВИМ ПРОКОВЗУВАННЯМ МІЖ ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ І КРУГОВИМ ШТАМПОМ ПІД ДІЮ НОРМАЛЬНОГО І ДОТИЧНОГО НАВАНТАЖЕНЬ</i> .....	65
<b>Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Астіоненко І. О.</b> <i>ЙМОВІРНІСТЬ: ВІД ПОЛІНОМІВ ЕРМІТА ДО КВАДРАТУРИ ГАУССА</i> .....	74
<b>Шевельова Н. В., Ходанен Т. В.</b> <i>ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ ШТАМПІВ ІЗ РІЗНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ НА ГРАНИЦІ ІЗОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ</i> .....	81
<b>Ярецька Н. О.</b> <i>РОЗВ'ЯЗОК КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА ТА ШАРУ, ЩО ЛЕЖИТЬ БЕЗ ТЕРТЯ НА ОСНОВІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ</i> .....	90

## РОЗДІЛ II. КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

<b>Kovalenko Yu. B., Kozlyuk I. O.</b> <i>FUNCTIONAL METHODS OF DEVELOPING INTEGRATED MODULAR AVIONICS SYSTEMS</i> .....	101
---	-----

## CONTENTS

### SECTION I. APPLIED MATHEMATICS

<b>Biliy D. V., Komarov O. V., Loboda V. V.</b> <i>ANTIPLANE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL PIEZOELECTRIC QUASICRYSTAL WITH AN INTERFACE CRACK</i> .....	5
<b>Vakal L. P., Vakal Ye. S., Dovgiy B. P.</b> <i>SOLVING FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND USING DIFFERENTIAL EVOLUTION</i> .....	15
<b>Gorban I. M., Korolova A. S.</b> <i>NUMERICAL SIMULATION OF A SOLITARY WAVE INTERACTION WITH SUBMERGED OBSTACLES</i> .....	22
<b>Yehoshkin D. I., Huk N. A.</b> <i>SETTING UP AND TRAINING A FUZZY MODEL FOR A CLASSIFICATION PROBLEM</i> .....	33
<b>Opanasovych V. K., Slobodyan M. S., Bilash O. V.</b> <i>PURE BENDING OF STRIP (BEAM) WITH TWO COAXIAL CRACKS PERPENDICULAR TO ITS AXIS AND ONE OF THEM IS LOCATED IN ZONE OF COMPRESSIVE STRESSES</i> .....	44
<b>Stegantseva P. G., Artemenko A. O.</b> <i>THE RECURRENCE RELATIONS FOR THE NUMBER OF THE NONISOMORPHIC <math>(n,m)</math>-GRAPHS</i> .....	51
<b>Stoliarova A. V., Koval R. A., Hatsenko A. V., Dioba N. O.</b> <i>THE DETERMINATION OF THE ELASTIC CONSTANTS OF THE COMPOSITE MATERIAL WITH SOLID AND HOLLOW EQUIVALENTLY DIRECTED FIBERS</i> .....	57
<b>Streliaiev Yu. M.</b> <i>PARTIAL SLIP CONTACT BETWEEN ELASTIC HALF-SPACE AND CIRCULAR PUNCH UNDER NORMAL AND TANGENTIAL LOADS</i> .....	65
<b>Khomchenko A. N., Lytvynenko O. I., Astionenko I. O.</b> <i>PROBABILITY: FROM HERMITE POLYNOMIALS TO GAUSS QUADRATURE</i> .....	74
<b>Shevelova N. V., Khodanen T. V.</b> <i>AN INTERACTION OF RIGIDLY COUPLED AND SLIPPING STAMPS ON THE BOUNDARY OF AN ISOTROPIC HALF-PLANE</i> .....	81
<b>Yaretska N. O.</b> <i>THE SOLUTION OF A CONTACT PROBLEM FOR A PRE-STRESSED CYLINDRICAL STAMP AND A LAYER WHICH IS LYING ON THE BASE WITHOUT FRICTION AND WITHOUT INITIAL STRESSES</i> .....	90

### SECTION II. COMPUTER SCIENCES

<b>Kovalenko Yu. B., Kozlyuk I. O.</b> <i>FUNCTIONAL METHODS OF DEVELOPING INTEGRATED MODULAR AVIONICS SYSTEMS</i> .....	101
---	-----

# РОЗДІЛ І. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-01>

## АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМІРНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО КВАЗІКРИСТАЛА З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

**Білий Д. В.**

*аспірант кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, 49000, Україна  
[orcid.org/0000-0001-6873-5765](https://orcid.org/0000-0001-6873-5765)  
[bily.dmitry@gmail.com](mailto:biliy.dmitry@gmail.com)*

**Комаров О. В.**

*кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, 49000, Україна  
[orcid.org/0000-0002-8532-2820](https://orcid.org/0000-0002-8532-2820)  
[21\\_21@ukr.net](mailto:21_21@ukr.net)*

**Лобода В. В.**

*доктор фізико-математичних наук, професор,  
завідувач кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, 49000, Україна  
[orcid.org/0000-0002-0432-629X](https://orcid.org/0000-0002-0432-629X)  
[loboda@dmu.dp.ua](mailto:loboda@dmu.dp.ua)*

**Ключові слова:** *тріщина, квазікристал, задача лінійного спряження.*

Розглянуто тунельну тріщину вздовж межі розділу двох зчеплених одновимірних п'єзоелектричних квазікристалічних півпросторів. Досліджуються провідні електричні умови на берегах тріщини. Вважається, що розташування атомів є періодичним у площині, перпендикулярній фронту тріщини та квазіперіодичним у напрямі фронту, причому остання вісь співпадає з напрямком поляризації матеріалів. Рівномірно розподілені антиплоскі фононні та фазонні зсувні напруження та електричне поле в площині, перпендикулярній фронту тріщини, задані на нескінченності.

Побудовані матрично-векторні представлення для фононних та фазонних напружень та електричного поля, а також для похідних від стрибка фононних та фазонних переміщень та електричного зміщення через вектор-функцію, голоморфну у всій комплексній площині, за винятком області тріщин. Задовольняючи з використанням цих представлень умовам на берегах тріщини, формулюється задача лінійного спряження Рімана-Гільберта з відповідними умовами на нескінченності та будується аналітичний розв'язок цієї задачі. Аналізуючи цей розв'язок, отримали аналітичні вирази для фононних та фазонних напружень та стрибків переміщень уздовж межі поділу матеріалів. Показано, що отриманий

розв'язок має осцилюючу кореневу сингулярність біля вершин тріщини. Важливо, що ця особливість не призводить до взаємного проникнення берегів тріщини, як у плоскому випадку. До того ж області осциляції є дуже малими, тому отримані розв'язки є прийнятними для практичного використання. Чисельний аналіз проведений для комбінації різних квазікристалічних з'єднань. Результати отримані для фононних та фазонних компонент пружно-деформівного стану вздовж межі поділу матеріалів і представлені в графічній формі. Зроблені висновки стосовно зміни фононних та фазонних характеристик на межі поділу матеріалів залежно від зовнішніх навантажень та геометричних факторів.

## ANTIPLANE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL PIEZOELECTRIC QUASICRYSTAL WITH AN INTERFACE CRACK

**Biliy D. V.**

*Postgraduate Student at the Department of Theoretical and Computer Mechanics  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarin avenue, 72, Dnipro, 49000, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-6873-5765  
bily.dmitry@gmail.com*

**Komarov O. V.**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences,  
Associate Professor at the Department of Theoretical and Computer Mechanics  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarin avenue, 72, Dnipro, 49000, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-8532-2820  
21\_21@ukr.net*

**Loboda V. V.**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Head of the Department of Theoretical and Computer Mechanics  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarin avenue, 72, Dnipro, 49000, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-0432-629X  
loboda@dnu.dp.ua*

**Key words:** *crack, quasicrystal,  
linear relationship problem.*

A tunnel crack along the interface of two coupled one-dimensional piezoelectric quasicrystalline half-spaces is considered. Conductive electrical conditions on the cracks are investigated. It is believed that the arrangement of atoms is periodic in the plane perpendicular to the crack front and it is quasi-periodic in the direction co-directed with the front, and the last axis coincides with the direction of materials polarization. Uniformly distributed antiplane phonon and phason shear stresses and the electric field in the plane perpendicular to the crack front are given at infinity.

Matrix-vector representations for phonon and phason stresses and electric field, as well as for the derivatives of phonon and phason displacements jumps and electric displacement are constructed. In these representations the mentioned values are expressed through the vector function holomorphic in the whole complex plane, except of the crack region. Satisfying with the use of these representations the conditions on the crack faces, the Riemann-Hilbert problem of linear relationship with the corresponding conditions at infinity is formulated and the analytical solution of this problem is constructed. Analyzing this solution, we obtain analytical expressions for phonon and phason stresses

and displacements jumps along the materials interface. It is shown that the obtained solution has an oscillating square root singularity near the crack vertices. It is important that this singularity does not lead to mutual penetration of the crack faces as in the plane case. In addition, the oscillation regions are very small, so the resulting solutions are acceptable for practical use.

Numerical analysis was performed for a combination of different quasicrystalline compounds. The results are obtained along the material interface for the phonon and phason components of the stress-strain state and are presented in graphical form. Conclusions are made regarding the variation of phonon and phason characteristics at the material interface depending on external loads and geometric factors.

**Вступ.** Квазікристали, що вперше висвітлені в [1], – це новий клас матеріалів, який активно вивчається близько кількох останніх десятиліть. Квазікристали (КК) відрізняються від звичайних кристалів та некристалів своєю високою міцністю, високою зносостійкістю, низькою тепловіддачею, тощо. Ці матеріали сьогодні використовуються для покриття поверхні двигунів, сонячних батарей, термоелектричних перетворювачів, контейнерів з ядерним паливом тощо.

Проблеми механіки руйнування квазікристалів та сучасний рівень досліджень по даній темі представлені в [2–4].

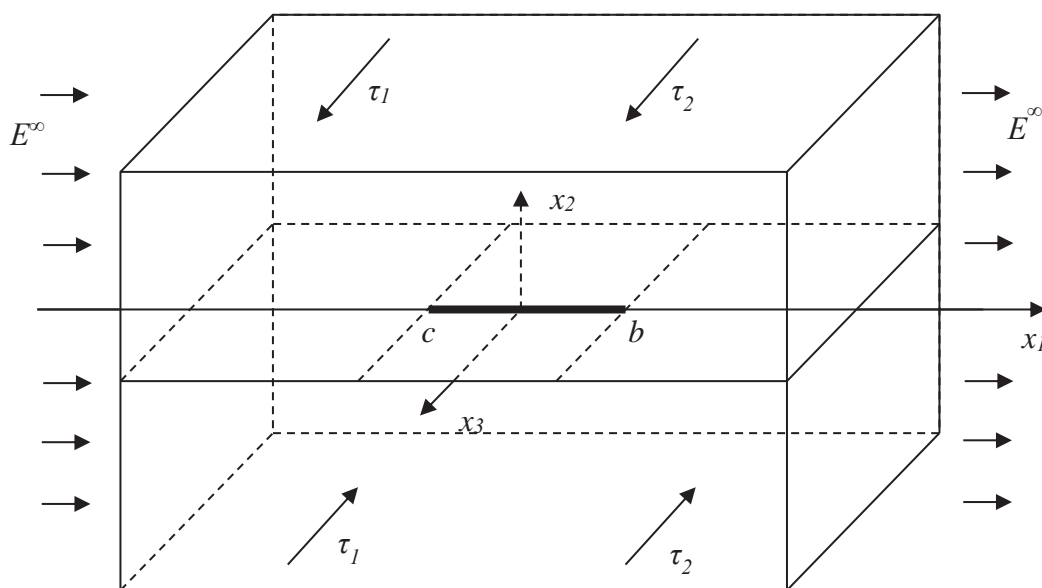
Багато квазікристалічних матеріалів мають п'єзоелектричні властивості. Теоретичні основи п'єзоелектрики в квазікристалах були розглянуті в [5; 6].

Тріщини між двома п'єзоелектричними квазікристалами до цього часу вивчені недостатньо. Із цієї теми в [7; 8] аналітично-чисельним методом досліджено електрично непроникну тріщину в одновимірному гексагональному термоелектропружному квазікристалічному біматеріалі. Міжфазні тріщини типу III між звичайними пружним матеріалом та квазікристалом були розглянуті в [9] без п'єзоелектричного ефекту. Тріщина між

різнорідними одновимірними гексагональними п'єзоелектричними квазікристалами з електропроникними та непроникними умовами на берегах тріщини в антиплоскому випадку вивчалась у роботі [10].

Провідна міжфазна тріщина при антиплоскому механічному навантаженні та плоскому електричному навантаженні була розглянута в роботах [11; 12]. У цих роботах виявлена осцилююча особливість на кінчиках тріщини. Спосіб усунення цієї особливості для провідної тріщини у неплоскому випадку запропоновано в [13]. Взаємодія тунельної провідної тріщини та віддаленого смугового електрода, розташованого на межі розділу двох п'єзоелектричних матеріалів, вивчалися в [14]. Однак, як відомо авторам, електропровідна міжфазна тріщина між двома п'єзоелектричними КК раніше не розглядалася. Саме така проблема для випадку антиплоского механічного та плоского електричного навантаження є основною темою даної статті.

**Постановка задачі.** Розглянемо тунельну тріщину шириною  $(c, b)$  на межі поділу двох одновимірних п'єзоелектричних квазікристалів  $x_2 > 0$  та  $x_2 < 0$  (Рис. 1). Атоми розміщені періодично в площині  $x_1 - x_2$ , та квазіперіодично по осі  $x_3$ ,



**Рис. 1.** Схематичне зображення тунельної тріщини між двома одновірними квазікристалами з умовами навантаження



яка співпадає з напрямом поляризації матеріалів. Півпростори навантажені на нескінченості зсувними фонон  $\sigma_{23}^\infty = \tau_1$ , та фазон  $H_{23}^\infty = \tau_2$  напруженнями та електричним полем  $E^\infty$ .

При такому навантаженні в тілі реалізується антиплоска деформація. Тоді визначальні співвідношення для кожної з підобластей мають вигляд:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{j3} \\ H_{j3} \\ D_j \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} u_{3,j} \\ w_{3,j} \\ \varphi_j \end{Bmatrix} \quad (j=1,2), \quad (1)$$

$$\text{де } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{44} & R_3 & -e_{15} \\ R_3 & K_2 & -\tilde{e}_{15} \\ e_{15} & \tilde{e}_{15} & \xi_{11} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$j=(x_1, x_2)$ , а  $i=1,2$  – для верхнього і нижнього матеріалів відповідно;  $\sigma_{3i}$  – компоненти фонон напруження;  $H_{3i}$  – компоненти фазон напруження;  $C_{44}, K_2$  – пружні константи у фононних і фазонних полях, відповідно;  $R_3$  – пружна константа зв'язку фононних і фазонних полів;  $e_{15}, d_{15}$  – п'єзоелектричні сталі;  $\lambda_{11}$  – діелектрична проникність.

Врахуємо механічні і електростатичні рівняння рівноваги для антиплоского випадку

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} = 0, \quad (3)$$

та зв'язок між електричним полем і потенціалом  $\varphi$

$$E_1 = -\varphi_{,1}, \quad E_2 = -\varphi_{,2} \quad (4)$$

Комбінуючи (1), (2) і (3) та умови зв'язку, можемо записати:

$$\begin{cases} C_{44} \nabla^2 u_3 + R_3 \nabla^2 w_3 + e_{15} \nabla^2 \varphi = 0 \\ R_3 \nabla^2 u_3 + K_2 \nabla^2 w_3 + d_{15} \varphi = 0 \\ e_{15} \nabla^2 u_3 + K_2 \nabla^2 w_3 + \lambda_{11} \varphi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{де } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Введемо вектори

$$\mathbf{u} = [u_3, w_3, \varphi]^T, \quad \mathbf{t}_j = [\sigma_{3j}, H_{3j}, D_j]^T. \quad (6)$$

Тоді рівняння (1) можна записати у формі

$$\mathbf{t}_j = \mathbf{R} \mathbf{u}_j \quad (j=1,2). \quad (7)$$

Із рівнянь (5) слідує, що функції  $u_3$ ,  $\varphi$  та  $w_3$  задовольняють рівняння  $\Delta u_3 = 0$ ,  $\Delta \varphi = 0$ ,  $\Delta w_3 = 0$ , відповідно, тобто вони являються гармонічними. Тому представимо вектор  $\mathbf{u}$ , компонентами якого і є функції  $u_3$ ,  $\varphi$  та  $w_3$ , як дійсну частину деякої аналітичної вектор-функції

$$\mathbf{u} = 2 \operatorname{Re} \Phi(z) = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) \quad (8)$$

(2 вводиться для зручності),

де  $\Phi(z) = [\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z)]^T$  є довільною аналітичною функцією комплексної змінної  $z = x_1 + ix_2$ .

Підставляючи (8) в (7), отримаємо

$$\mathbf{t}_1 = -i \mathbf{B} \Phi'(z) + i \bar{\mathbf{B}} \bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{B} \Phi'(z) + \bar{\mathbf{B}} \bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (9)$$

де  $\mathbf{B} = i \mathbf{R}$ .

Для розв'язку задачі, поставленої в даній статті, введемо також нові вектори:

$$\mathbf{v}' = [u'_3, w'_3, D_2]^T, \quad \mathbf{P} = [\sigma_{32}, H_{32}, \varphi']^T. \quad (10)$$

На основі раніше отриманих представлень (8) та (9) ці нові вектори можемо записати в наступній формі

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M} \Phi'(z) + \bar{\mathbf{M}} \bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (11)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{N} \Phi'(z) + \bar{\mathbf{N}} \bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (12)$$

де  $\mathbf{M} = [M_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ ,  $\mathbf{N} = [N_{ij}]_{i,j=1,2,3}$  і  $M_{11} = M_{22} = 1$ ,  $M_{12} = M_{13} = M_{21} = M_{23} = 0$ ,  $M_{3j} = B_{3j}$ ,  $N_{ij} = B_{ij}$  ( $i=1,2; j=1,2,3$ ),  $N_{33} = 1$ ,  $N_{31} = N_{32} = 0$ .

Це значить що матриці  $\mathbf{M}$  та  $\mathbf{N}$  будуть мати наступну структуру

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Припустимо, що область, яка розглядається, скомпонована з двох півпросторів  $x_2 > 0$  та  $x_2 < 0$ . Тоді представлення (11) та (12) можуть бути записаними для обох півпросторів  $x_2 > 0$  та  $x_2 < 0$  в формі

$$\mathbf{v}^{(m)} = \mathbf{M}^{(m)} \Phi'^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{M}}^{(m)} \bar{\Phi}'^{(m)}(\bar{z}),$$

$$\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{N}^{(m)} \Phi'^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{N}}^{(m)} \bar{\Phi}'^{(m)}(\bar{z}), \quad (14)$$

де  $m=1$  для верхньої частини композиту та  $m=2$  для нижньої частини, відповідно;  $\mathbf{M}^{(m)}, \mathbf{N}^{(m)}$  – матриці, аналогічні  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ , для півпросторів 1 та 2;  $\Phi^{(m)}(z)$  – довільні вектор-функції, аналітичні в півпросторах 1 та 2, відповідно.

Будемо вимагати далі виконання рівності  $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(2)}$  на усій межі поділу матеріалів. Тоді, на основі формули (14) маємо

$$\begin{aligned} N^{(1)} \Phi'^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{N}^{(1)} \bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0) = \\ = N^{(2)} \Phi'^{(2)}(x_1 - i0) + \bar{N}^{(2)} \bar{\Phi}'^{(2)}(x_1 + i0) \end{aligned} \quad (15)$$

для  $-\infty < x_1 < \infty$ .

Тут було використано позначення  $F(x_1 \pm i0) = F^\pm(x_1)$ , що означає граничне значення функції  $F(z)$  при  $x_2 \rightarrow 0$  з наближенням зверху чи знизу, відповідно.

Рівняння (15) можна записати в наступній формі

$$\begin{aligned} N^{(1)} \Phi'^{(1)}(x_1 + i0) - \bar{N}^{(2)} \bar{\Phi}'^{(2)}(x_1 + i0) = \\ = N^{(2)} \Phi'^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{N}^{(1)} \bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0). \end{aligned}$$



Будемо вважати, що права та ліва частина останньої рівності являє собою граничні значення функцій

$$N^{(1)}\Phi^{(1)}(z) - \bar{N}^{(2)}\bar{\Phi}^{(2)}(z) \text{ для } x_2 > 0 \quad (16)$$

та

$$N^{(2)}\Phi^{(2)}(z) - \bar{N}^{(1)}\bar{\Phi}^{(1)}(z) \text{ для } x_2 < 0, \quad (17)$$

які аналітичні в верхній та нижній півплощинах, відповідно. Але це означає існування функції  $\Pi(z)$ , яка є аналітичною у всій площині і дорівнює функціям (16), (17) для кожної півплощини.

Припустимо, що  $\Pi(z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ , тоді на основі теореми Ліувілля знайдемо, що кожна з функцій (16), (17) рівна 0 для будь якого  $z$  в кожній з півплощин. Отже отримуємо:

$$\bar{\Phi}^{(2)}(z) = (\bar{N}^{(2)})^{-1} N^{(1)}\Phi^{(1)}(z) \text{ для } x_2 > 0, \quad (18)$$

$$\bar{\Phi}^{(1)}(z) = (\bar{N}^{(1)})^{-1} N^{(2)}\Phi^{(2)}(z) \text{ для } x_2 < 0. \quad (19)$$

Далі знайдемо стрибок наступної вектор функції при переході через інтерфейс

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{v}'^{(1)}(x_1 + i0) - \mathbf{v}'^{(1)}(x_1 - i0), \quad (20)$$

Знаходячи з першої формули (14)

$$\mathbf{v}'^{(k)}(x_1 \pm i0) = M^{(k)}\Phi^{(k)}(x_1 \pm i0) + \bar{M}^{(k)}\bar{\Phi}^{(k)}(x_1 \mp i0).$$

і підставляючи в (20), маємо:

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = M^{(1)}\Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{M}^{(1)}\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) - M^{(2)}\Phi^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{M}^{(2)}\bar{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0). \quad (21)$$

Визначаючи з рівняння (19)

$$\Phi^{(2)}(x_1 - i0) = (N^{(2)})^{-1} \bar{N}^{(1)}\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0)$$

і підставляючи цей вираз разом з (18), при  $x_2 \rightarrow +0$ , в (21), визначимо стрибок у формі

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{D}\Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{D}}\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0), \quad (22)$$

де  $\mathbf{D} = M^{(1)} - \bar{M}^{(2)}(\bar{N}^{(2)})^{-1} N^{(1)}$ .

Вводячи нову вектор-функцію

$$W(z) = \begin{cases} \mathbf{D}\Phi^{(1)}(z), & x_2 > 0, \\ -\bar{\mathbf{D}}\bar{\Phi}^{(1)}(z), & x_2 < 0, \end{cases} \quad (23)$$

рівняння (22) можна записати у вигляді

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1). \quad (24)$$

Із другого співвідношення (4) будемо мати наступне:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = N^{(1)}\Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{N}^{(1)}\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0). \quad (25)$$

Взявши до уваги, що на основі (23)

$$\Phi^{(1)}(x_1 + i0) = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}(x_1 + i0),$$

$$\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) = -(\bar{\mathbf{D}}^{-1})^{-1}\mathbf{W}(x_1 - i0),$$

і підставляючи ці співвідношення в (25), отримуємо

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (26)$$

де  $\mathbf{S} = N^{(1)}D^{-1}$ . З останнього співвідношення отримуємо

$$\mathbf{S} = \left[ M^{(1)}(N^{(1)})^{-1} - \bar{M}^{(2)}(\bar{N}^{(2)})^{-1} \right]^{-1}. \quad (27)$$

Таким чином, отримані наступні важливі рівняння

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (28)$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (29)$$

де  $\mathbf{W}(z)$  – довільна вектор-функція аналітична в кожній з півплощин.

Чисельний аналіз показує, що матриця  $\mathbf{S}$  має таку структуру

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} is_{11} & is_{12} & s_{13} \\ is_{21} & is_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & is_{33} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

де всі  $s_{ij}$  є дійсними.

Введемо однорядкову матрицю  $\mathbf{R} = [R_1, R_2, R_3]$  і помножимо на неї (29). Після цього отримаємо

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{R}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1) \quad (31)$$

Введемо нову матрицю  $\mathbf{T}$  наступним чином

$$\mathbf{R}\mathbf{S} = \mathbf{T}, \quad \mathbf{R}\bar{\mathbf{S}} = -\gamma\mathbf{T}, \quad (32)$$

де  $\mathbf{T} = [T_1, T_2, T_3]$  – однорядкова матриця.

Підставивши нові презентації (32) в (31), отримаємо

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{T}\mathbf{W}^+(x_1) + \gamma\mathbf{T}\mathbf{W}^-(x_1) \quad (33)$$

Введемо нову довільну функцію вигляду

$$F(z) = \mathbf{T}\mathbf{W}(z). \quad (34)$$

Тоді рівняння (33) можна записати так

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1), \quad (35)$$

На основі рівнянь (32) маємо:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{S} = -\gamma^{-1}\mathbf{R}\bar{\mathbf{S}} \Rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{S} + \gamma^{-1}\bar{\mathbf{S}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R}(\gamma\mathbf{S} + \bar{\mathbf{S}}) = \mathbf{0}.$$

Транспонуючи ліву і праву частину останнього рівняння, отримаємо

$$(\gamma\mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T)\mathbf{R}^T = \mathbf{0}. \quad (36)$$

Із записаного рівняння видно що  $\gamma$  і  $\mathbf{R}^T = \mathbf{0}$  є власним значенням та власним вектором системи (36), відповідно. Тож для подальшого аналізу потрібно їх визначити.

Рівняння вигляду  $\det(\gamma\mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T) = 0$  можна записати в розгорнутому вигляді як:

$$\det \begin{bmatrix} i(\gamma-1)s_{11} & i(\gamma-1)s_{21} & (\gamma+1)s_{31} \\ i(\gamma-1)s_{12} & i(\gamma-1)s_{22} & (\gamma+1)s_{32} \\ (\gamma+1)s_{13} & (\gamma+1)s_{23} & i(\gamma-1)s_{33} \end{bmatrix} = 0,$$

Розкриваючи визначник, одержуємо:

$$i^3(\gamma-1)^3(s_{11}s_{22}s_{33} - s_{12}s_{21}s_{33}) + i(\gamma-1)(\gamma+1)^2(s_{12}s_{23}s_{31} + s_{13}s_{32}s_{21} - s_{13}s_{22}s_{31} - s_{11}s_{23}s_{32}) = 0 \quad (37)$$

Розв'язавши рівняння, отримаємо три корені:

$$\gamma_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_2 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_3 = 1, \quad (38)$$

$$\text{де } \delta^2 = \frac{s_{12}s_{23}s_{31} + s_{13}s_{32}s_{21} - s_{13}s_{22}s_{31} - s_{11}s_{23}s_{32}}{s_{33}(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})}. \quad (39)$$

Для знаходження ж власних векторів, згідно з (36), маємо

$$\begin{bmatrix} i(\gamma-1)s_{11} & i(\gamma-1)s_{21} & (\gamma+1)s_{31} \\ i(\gamma-1)s_{12} & i(\gamma-1)s_{22} & (\gamma+1)s_{32} \\ (\gamma+1)s_{13} & (\gamma+1)s_{23} & i(\gamma-1)s_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (40)$$

Використавши раніше визначене  $\gamma = \gamma_1$ , можна записати (40) у вигляді:

$$\begin{bmatrix} i(\gamma_1-1)s_{11} & i(\gamma_1-1)s_{21} & (\gamma_1+1)s_{31} \\ i(\gamma_1-1)s_{12} & i(\gamma_1-1)s_{22} & (\gamma_1+1)s_{32} \\ (\gamma_1+1)s_{13} & (\gamma_1+1)s_{23} & i(\gamma_1-1)s_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (41)$$

Позначимо одну з компонент власного вектора як  $R_2 = 1$  та розглянемо I і II рівняння (41). Отримаємо

$$\begin{bmatrix} i(\gamma_1-1)s_{11} & (\gamma_1+1)s_{31} \\ i(\gamma_1-1)s_{12} & (\gamma_1+1)s_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -i(\gamma_1-1)s_{21} \\ -i(\gamma_1-1)s_{22} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

З цієї системи рівнянь, одержуємо

$$R_1 = \frac{s_{22}s_{31} - s_{21}s_{32}}{D}, \quad R_3 = i\delta \frac{s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}}{D},$$

$$\text{де } D = s_{11}s_{32} - s_{12}s_{31}, \quad \delta = \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}.$$

Аналогічно взявши з (38) значення  $\gamma = \gamma_3 = 1$  і підставивши в (40) отримаємо

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & s_{31} \\ 0 & 0 & s_{32} \\ s_{13} & s_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Звідки слідує що  $R_3 = 0$ , а вибравши  $R_2 = 1$ , визначаємо значення  $R_1 = -s_{23} / s_{13}$ .

Для зручного представлення отриманих результатів, введемо наступні позначення  $r_{11} = \frac{s_{22}s_{31} - s_{21}s_{32}}{D}$ ,  $r_{13} = \delta \frac{s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}}{D}$ ,  $r_{31} = -s_{23} / s_{13}$ , після чого можна записати матрицю  $\mathbf{R}$ , скомпоновану з власних векторів, у вигляді

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & 1 & ir_{13} \\ -r_{11} & 1 & -ir_{13} \\ r_{31} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

Враховуючи, що  $\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{S}$  отримаємо наступне представлення

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} it_{11} & it_{12} & t_{13} \\ it_{21} & it_{22} & t_{23} \\ it_{31} & it_{32} & 0 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Важливо зазначити, що всі елементи  $r_{ij}$  та  $t_{ij}$  в (43) та (44), відповідно, дійсні.

Використавши раніше отримані рівняння (35) та (43), можемо записати:

$$r_{j1}\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) + H_{23}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j3}E_1^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (j=1, 3) \quad (45)$$

де  $r_{33} = 0$ .

Враховуючи представлення (34), на його основі отримаємо

$$F^+(x_1) - F^-(x_1) = \mathbf{T}\{\mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1)\},$$

а також використовуючи формули (15) і (44), можна записати наступну рівність

$$it_{j1}\langle u'_3(x_1) \rangle + it_{j2}\langle w'_3(x_1) \rangle + t_{j3}\langle D_2(x_1) \rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad (46)$$

при цьому  $t_{33} = 0$ .

### Електропровідна тріщина

Рівняння (45) та (46) можуть бути використані для формування та знаходження розв'язку різних антиплоских задач для 1D п'єзоелектричних біматеріальних квазікристалічних композитів зі змішаними граничними умовами. Розглянемо електропровідну тріщину  $c \leq x_1 \leq b$  на інтерфейсі  $x_2 = 0$  між двома півпросторами  $x_2 > 0$  і  $x_2 < 0$ , скомпонованими з 1D п'єзоелектричних квазікристалів, поляризованих в напрямку осі  $x_3$  (Рис. 1). Півпростори піддаються рівномірно розподіленому зсувному фонону  $\sigma_{23}^\infty$  та фазону  $H_{23}^\infty$  напруженням, а також електричному полю  $E_1^\infty$  на нескінченності. Сама ж тріщина вважається вільною від механічних навантажень. Такий тип зовнішніх полів навантажень призводять до антиплоского стану, а отже, можна розглядати переріз у площині, ортогональній  $x_3$ .

Граничні умови в такій задачі можна сформулювати у вигляді

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) = H_{23}^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(1)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } c < x_1 < b, \quad (47)$$

$$\langle \sigma_{23} \rangle = 0, \quad \langle H_{23} \rangle = 0, \quad \langle D_2 \rangle = 0, \quad \langle u'_3 \rangle = 0, \quad \langle E_1 \rangle = 0, \quad w'_3 = 0 \quad \text{для } x_1 \notin (c, b). \quad (48)$$

Умови (48) з використанням представлень (46) забезпечують неперервність функції  $F_1(z)$  на відрізках  $x_1 \notin (c, b)$  інтерфейсу матеріалу, а умова (47) з використанням (45) веде до наступного рівняння:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = 0 \quad \text{для } c < x_1 < b. \quad (49)$$

Беручи до уваги що для відрізка  $x_1 \notin (c, b)$  справедливі співвідношення  $F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1)$ , на основі (45) одержуємо для  $x_1 \rightarrow \infty$

$$(1 + \gamma_j)F_j(x_1) = r_{j1}\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) + H_{23}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j3}E_1^{(1)}(x_1, 0).$$

Але враховуючи що функції  $F_j(z)$  аналітичні у всій площині за виключенням відрізка  $x_1 \in (c, b)$  та використовуючи умови на нескінченності, з останнього рівняння отримаємо

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j, \quad (50)$$

$$\text{де } \tilde{\tau}_j = \frac{r_{j1}\tau^\infty + H_{23}^\infty}{1 + \gamma_j}, \tilde{\sigma}_j = \frac{r_{j3}E^\infty}{1 + \gamma_j}, (j=1,2,3).$$

Розв'язок рівняння (49) за умов на нескінченності (50) було знайдено з використанням [15] у формі:

$$F_j(z) = (\tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j) \frac{z - (b+c)/2 - i\varepsilon_j l \left( \frac{z-c}{z-b} \right)^{ie_j}}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}, \quad (51)$$

$$\text{де } \varepsilon_j = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma_j, l = b - c.$$

Фонон та фазон напруження, та електричне поле на інтерфейсі отримані з рівнянь (45), (51) у такій формі:

$$\begin{aligned} & r_{j1}\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) + H_{23}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j3}E_1^{(1)}(x_1, 0) = \\ & = (r_{j1}\tau^\infty + H_{23}^\infty + ir_{j3}E^\infty) \frac{x_1 - (b+c)/2 - i\varepsilon_j l \left( \frac{x_1-c}{x_1-b} \right)^{ie_j}}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}} \end{aligned} \quad (52)$$

для  $x_1 > a$ .

Електричну індукцію та похідну від стрибка переміщення знайдемо на основі формул (46), (51) у вигляді

$$\begin{aligned} & it_{j1}\langle u'_3(x_1) \rangle + it_{j2}\langle w'_3(x_1) \rangle + t_{j3}\langle D_2(x_1) \rangle = \\ & = \frac{r_{j3}E^\infty - ir_{j1}\tau^\infty - iH_{23}^\infty}{\sqrt{\gamma_j}} \times \frac{x_1 - (b+c)/2 - i\varepsilon_j l \left( \frac{x_1-c}{b-x_1} \right)^{ie_j}}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}} \end{aligned} \quad (53)$$

для  $c < x_1 < a$ .

Інтегруючи останню рівність, отримуємо

$$\begin{aligned} & it_{j1}\langle u_3(x_1) \rangle + it_{j2}\langle w_3(x_1) \rangle + t_{j3}\langle \widehat{D}_2(x_1) \rangle = \\ & = \sqrt{(x_1-c)(b-x_1)} \left\{ \frac{ir_{j1}\tau^\infty + iH_{23}^\infty - r_{j3}E^\infty \left( \frac{x_1-c}{b-x_1} \right)^{ie_j}}{\sqrt{\gamma_j}} \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

для  $c < x_1 < a$ ,

$$\text{де } \langle \widehat{D}_2(x_1, 0) \rangle = \int \langle D_2(x_1, 0) \rangle dx_1.$$

Всі необхідні компоненти фонон та фазон напружень та стрибків переміщення можуть бути отримані з рівнянь (52) та (54), розглядаючи їх при  $j=1$  та  $j=3$ , відповідно. З одержаних результатів видно, що біля вершин тріщини виникає коренева осциляційна особливість. Важливо, що ця особливість не призводить до взаємного проникнення берегів тріщини як в плоскому випадку [16]. До того ж області осциляції є дуже малими, тому отримані розв'язки є прийнятними для практичного використання.

### Чисельні результати та обговорення

У даному розділі основна увага буде приділена випадку електропровідних умов, які мають місце при наявності електродів на берегах тріщини. Використаємо для нижнього та верхнього матеріалів п'єзоелектричні квазікристали з наступними характеристиками [17]:

$$\begin{aligned} c_{44}^{(1)} &= 3.55 \times 10^{10} \text{ Па}, & e_{15}^{(1)} &= 17 \text{ К/м}^2, \\ K_2^{(1)} &= 0.15 \times 10^9 \text{ Па}, & R_3^{(1)} &= 1.765 \times 10^9 \text{ Па}, \\ \tilde{e}_{15}^{(1)} &= 17 \text{ К/м}^2, & \xi_{11}^{(1)} &= 15.1 \times 10^{-9} \text{ К}^2 / (\text{Нм}^2) \end{aligned}$$

для верхнього матеріалу,

$$\begin{aligned} c_{44}^{(2)} &= 5.0 \times 10^{10} \text{ Па}, & e_{15}^{(2)} &= -0.318 \text{ К/м}^2, \\ K_2^{(2)} &= 0.3 \times 10^9 \text{ Па}, & R_3^{(2)} &= 1.2 \times 10^9 \text{ Па}, \\ \tilde{e}_{15}^{(2)} &= -0.16 \text{ К/м}^2, & \xi_{11}^{(2)} &= 8.25 \times 10^{-12} \text{ К}^2 / (\text{Нм}^2) \end{aligned}$$

для нижнього матеріалу. Результати отримані для  $c = -0,05 \text{ м}$ ,  $b = 0,05 \text{ м}$ .

На Рис. 2 показані фононне  $\langle u_3 \rangle$  (а) і фазонне  $\langle w_3 \rangle$  (б) розкриття тріщини, побудовані для різних значень електричного поля  $E_1^\infty$ , а саме  $E_1^\infty = 5000 \text{ В/м}$  (криві I),  $0$  (криві II),  $-5000 \text{ В/м}$  (криві III) при  $\sigma_{23}^\infty = 10^5 \text{ Па}$ ,  $H_{23}^\infty = 0$ , а на Рис. 3 показані відповідні графіки цих же величин, побудовані при таких же значеннях електричного поля, що і на рисунку 2, і  $\sigma_{23}^\infty = 0 \text{ Па}$ ,  $H_{23}^\infty = 10^5 \text{ Па}$ . Як видно з цих рисунків, більший вплив на стрибки переміщення  $\langle u_3 \rangle$  та  $\langle w_3 \rangle$  викликає саме фазон навантаження, а вплив електричного поля є досить суттєвим.

Фонон напруження на правому продовженні тріщини, отримані при нульовому електричному полю і  $\sigma_{23}^\infty = 10^6 \text{ Па}$  (крива I),  $5 \times 10^5 \text{ Па}$  (II),  $10^5 \text{ Па}$  (III), наведені на Рис. 5. Легко помітити, що при зміні навантаження на нескінченності змінюються і значення полів напружень на продовженні тріщини. Водночас вплив електричного поля, прикладеного на нескінченності, не суттєво впливає на фонон та фазон напруження в околі тріщини.

**Висновки.** Досліджено нову задачу для електропровідної тріщини вздовж межі розділу двох зчеплених одновимірних п'єзоелектричних квазікристалічних півпросторів під дією антиплоского механічного навантаження і плоского електричного поля, перпендикулярного фронту тріщини. Сформульовані подання для напружень та електричного поля (33), а також для похідних від стрибка механічного та електричного переміщення (34) через вектор-функцію, голоморфну у всій комплексній площині, за винятком області тріщин. На основі цих рівнянь отримана задача лінійного спряження (37) з відповідними умовами на нескінченності (38) та побудований її аналітичний розв'язок. На основі цього розв'язку отримані аналітичні подання для фононних та фазонних напружень, стрибків переміщень та електричного поля уздовж межі розділу матеріалів. Виявлено,

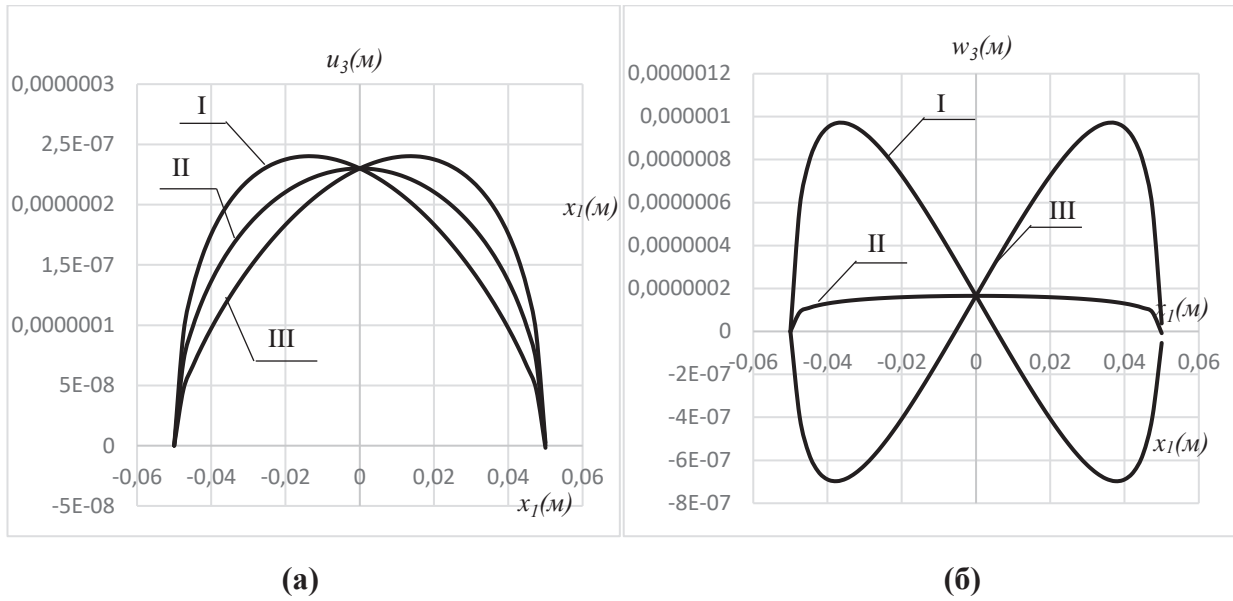


Рис. 2. Стрибок переміщення  $\langle u_3 \rangle$  (а) та  $\langle w_3 \rangle$  (б) в залежності від електричного поля  $E_1^\infty$  при  $\sigma_{23}^\infty = 10^5$  Па,  $H_{23}^\infty = 0$

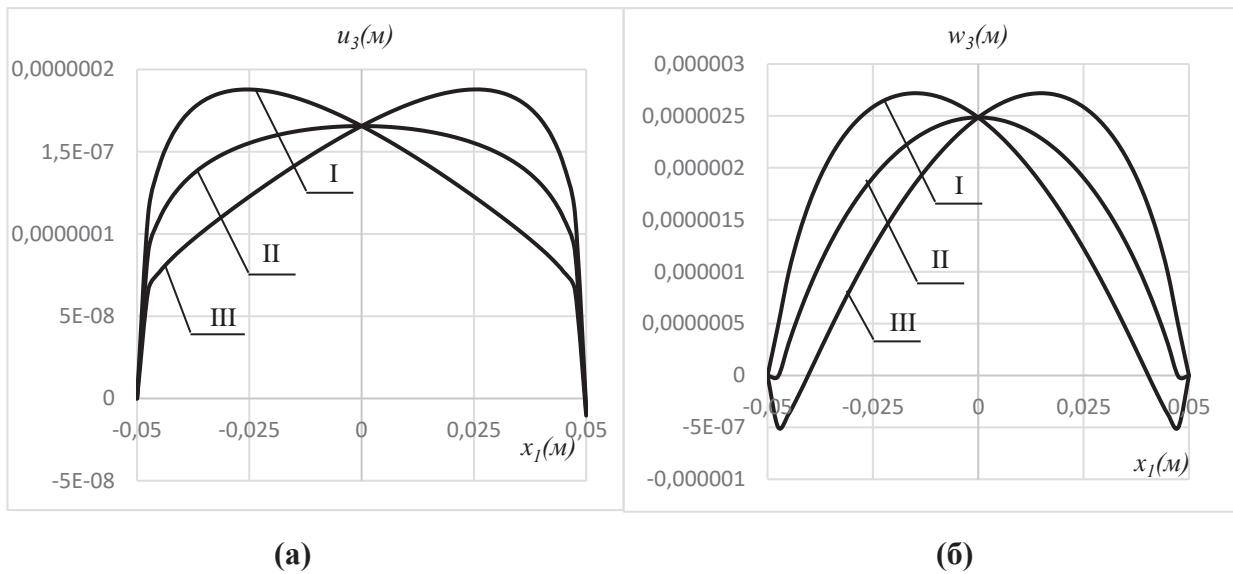


Рис. 3. Стрибок переміщення  $\langle u_3 \rangle$  (а) та  $\langle w_3 \rangle$  (б) в залежності від електричного поля  $E_1^\infty$  при  $\sigma_{23}^\infty = 0$  Па,  $H_{23}^\infty = 10^5$  Па

що отриманий розв'язок має осцилюючу кореневу особливість в околі вершин тріщини.

Для конкретної комбінації квазікристалічних матеріалів проведена чисельна реалізація отриманих результатів. У графічній формі представлені результати розрахунку фононних та фазон-

них компонент пружно-деформівного стану вздовж межі поділу матеріалів. Встановлено, що електричне поле, прикладене на нескінченності, особливо суттєво впливає на фазонні розкриття тріщини і менш суттєво на напруження в її околі.

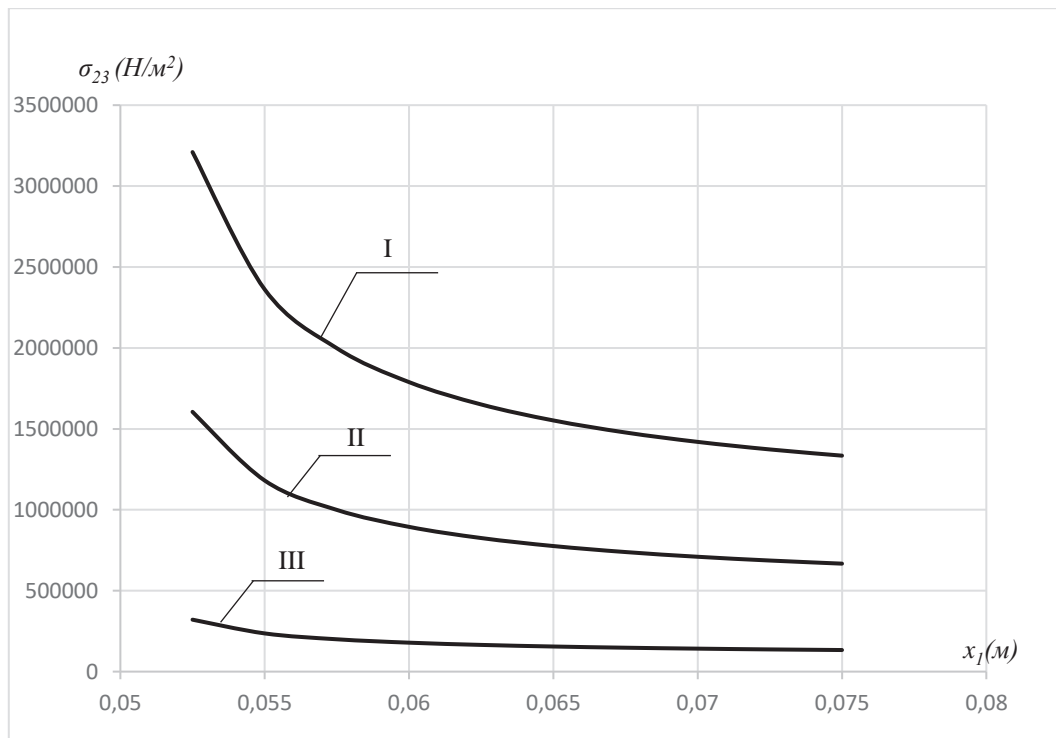


Рис. 4. Зміна фоновану напруження на продовженні тріщини, при  $E_1^\infty = 0B / m$  і різних значеннях зовнішнього зсувного напруження  $\sigma_{23}^\infty$ .

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Shechtman, D.; Blech, I.; Gratias, D.; Cahn J. W. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Physical Review Letters* 1984, 53 (20), 1951-1953. DOI: 10.1103/PhysRevLett.53.1951.
2. Ding, D. H.; Yang W.; Hu C. Z.; Wang R. Generalized elasticity theory of quasicrystals. *Phys Rev B* 1993, 48:7003–10. DOI: 10.1103/PhysRevB.48.7003.
3. Hu C. Z.; Wang R. H.; Ding D. H. Symmetry groups, physical property tensors, elasticity and dislocations in quasicrystals. *Reports on Progress in Physics* 2000, 63 (1), 1-39. DOI: 10.1088/0034-4885/63/1/201.
4. Fan T. Y. *Mathematical theory of elasticity of quasicrystals and its applications*. Beijing: Springer, 2011.
5. Rao K. R. M.; Rao P. H.; Chaitanya B. S. K. Piezoelectricity in quasicrystals. *Pramana-Journal of Physics* 2007, 68 (3), 481-487. DOI: 10.1007/s12043-007-0051-3.
6. Altay G.; Dömeçi M. C. On the fundamental equations of piezoelectricity of quasicrystal media. *International Journal of Solids and Structures* 2012, 49 (23-24), 3255-3262. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2012.06.016.
7. Zhao M. H.; Dang H. Y.; Fan C. Y.; Chen Z. T. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, Part 1: Theoretical solution. *Engineering Fracture Mechanics* 2017, 179, 59–78. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.04.019.
8. Zhao M. H.; Dang H. Y.; Fan C. Y.; Chen Z. T. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, Part 2: Numerical method. *Engineering Fracture Mechanics* 2017, 180, 268-281. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.05.042.
9. Shi W. C.; Li H. H.; Gao Q. H. Interfacial cracks of antiplane sliding mode between usual elastic materials and quasicrystals. *Key Eng. Mater.* 2007, 340–341, 453–458. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.340-341.453.
10. Hu K. Q.; Jin H.; Yang Z.; Chen X. Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect. *Acta Mech.* 2019, 230, 2455–2474. DOI: 10.1007/s00707-019-02404-z.

11. Wang X.; Zhong Z. A conducting arc crack between a circular piezoelectric inclusion and an unbounded matrix. *Int. J. Solids Struct.* 2002, 39, 5895–5911. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00474-2.
12. Wang X.; Zhong Z.; Wu F. L. A moving conducting crack at the interface of two dissimilar piezoelectric materials. *Int. J. Solids Struct.* 2003, 40, 2381–2399. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00060-X.
13. Onopriienko O.; Loboda V.; Sheveleva A.; Lapusta Y. Bond zone model for a conductive crack at the interface of piezoelectric materials under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings. *Z Angew Math Mech.* 2019, e201800230. DOI: 10.1002/zamm.201800230.
14. Sheveleva A.; Loboda V.; Lapusta Y. A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. *Applied Math. Modeling* 2020, 87, 287-299. DOI: 10.1016/j.apm.2020.06.003.
15. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen, 1975.
16. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concept for interfacial cracks. *Journal of Applied Mechanics* 1988, 55, 98-103. DOI: 10.1115/1.3173668.
17. Zhou Y.-B.; Li X.-F. Exact solution of two collinear cracks normal to the boundaries of a 1D layered hexagonal piezoelectric quasicrystal. *Philos. Mag.* 2018, 98, 1780–1798. DOI: 10.1080/14786435.2018.1459057.



УДК 519.6:004.021  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-02>

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА II РОДУ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

**Вакал Л. П.**

*кандидат технічних наук, старший науковий співробітник  
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України  
пр. Академіка Глушкова, 40, Київ, Україна  
[orcid.org/0000-0002-1658-5432](https://orcid.org/0000-0002-1658-5432)  
[lara.vakal@gmail.com](mailto:lara.vakal@gmail.com)*

**Вакал Є. С.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри математичної фізики  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
вул. Володимирська, 60, Київ, Україна  
[orcid.org/0000-0001-8581-9098](https://orcid.org/0000-0001-8581-9098)  
[jvakal@gmail.com](mailto:jvakal@gmail.com)*

**Довгий Б. П.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри математичної фізики  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
вул. Володимирська, 60, Київ, Україна  
[orcid.org/0000-0002-2468-3542](https://orcid.org/0000-0002-2468-3542)  
[dovgiy\\_i\\_ko@i.ua](mailto:dovgiy_i_ko@i.ua)*

**Ключові слова:** *наближений розв'язок, інтегральна нев'язка, мінімум норми, оптимальні значення параметрів.*

У статті розглядається лінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду з невідродженим ядром. Наводиться огляд методів знаходження його наближених розв'язків. Вивчається випадок, коли за наближений розв'язок рівняння вибирається функція, що лінійно залежить від низки вільних параметрів. Оптимальні значення цих параметрів пропонується визначати з умови мінімуму відповідної норми інтегральної нев'язки, яка утворюється після підстановки вказаної функції в рівняння. У свою чергу, задача мінімізації норми нев'язки розглядається як оптимізаційна задача, і для її розв'язання використовується алгоритм диференціальної еволюції, призначений для пошуку глобального мінімуму (максимуму) функцій багатьох змінних. У цьому алгоритмі для популяції векторів, які представляють собою можливі розв'язки задачі мінімізації, моделюються базові процеси біологічної еволюції: схрещування, мутація та селекція, щоб сформувати наступну популяцію векторів, значення цільової функції (критерію мінімізації) яких будуть меншими, ніж у векторів попередньої популяції. Умовою закінчення алгоритму є досягнення заданого максимального числа популяцій. Координати вектора останньої популяції, який має найменше значення цільової функції, є оптимальними значеннями параметрів наближеного розв'язку. Алгоритм простий у програмній реалізації та застосуванні (містить мало параметрів налаштування), дозволяє використовувати різні норми інтегральної нев'язки (квадратичну, рівномірну, суму модулів значень нев'язки). Схема

запропонованого алгоритму модифікована порівняно зі стандартною і не містить операції схрещування. Це дозволило спростити алгоритм без шкоди для точності отриманих результатів. Як показав обчислювальний експеримент, для знаходження оптимальних значень параметрів цілком достатньо операцій мутації та селекції. Алгоритм імплементований у системі Matlab. Розглядаються приклади знаходження наближених розв'язків з використанням розробленого алгоритму, який можна розглядати як додатковий інструмент до відомих проекційних методів розв'язання рівнянь Фредгольма.

## SOLVING FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND USING DIFFERENTIAL EVOLUTION

**Vakal L. P.**

*Candidate of Technical Sciences, Senior Research Fellow  
V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
Academician Glushkov avenue, 40, Kyiv, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-1658-5432  
lara.vakal@gmail.com*

**Vakal Ye. S.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Mathematical Physics  
Taras Shevchenko National University of Kyiv  
Volodymyrska str., 60, Kyiv, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-8581-9098  
jvakal@gmail.com*

**Dovgiy B. P.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Mathematical Physics  
Taras Shevchenko National University of Kyiv  
Volodymyrska str., 60, Kyiv, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-2468-3542  
dovgiy\_i\_ko@i.ua*

**Key words:** *approximate solution, integral residual, minimum of norm, optimal values of parameters.*

Fredholm linear integral equation of the second kind with a nondegenerate kernel is considered in the paper. An overview of methods for finding its approximate solutions is given. We study a case when a function that linearly depends on a number of free parameters is chosen as the approximate solution of the equation. If we substitute the function into the equation, an integral residual is formed. It is proposed to determine optimal values of the parameters from minimum condition for a corresponding norm of the integral residual. We consider the problem of the residual norm minimization as an optimization problem and propose to use a differential evolution algorithm, which is designed to find a global minimum (maximum) of many variables functions. In this algorithm, basic processes of biological evolution – crossover, mutation and selection – are simulated for a population of vectors to form the next population of the vectors with smaller values of the objective function (minimization criterion). The vectors of these populations are the possible solutions of the minimization problem. If a given maximum number of the populations is reached, the evolutionary process in the algorithm ends. Coordinates of the vector of the last population, which has the smallest value of the objective function, are the optimal values of the parameters of the

approximate solution. The algorithm is simple in software implementation and application (it contains few settings parameters), it allows to use different norms of integral residual (quadratic, uniform, a sum of residual values modules). The scheme of the proposed algorithm is modified compared to the standard scheme and it does not contain the crossover operation. This allowed simplifying the algorithm without compromising the accuracy of obtained results. A computational experiment has shown that mutation and selection operations are sufficient to find the optimal values of the parameters. The algorithm is implemented in Matlab. Examples of finding the approximate solutions using the algorithm are given. The proposed algorithm can be considered as an additional tool to the known projection methods for solving Fredholm equations.

**Вступ.** Інтегральні рівняння Фредгольма використовуються для опису різного роду крайових задач. У цьому сенсі вони еквівалентні звичайним диференціальним рівнянням із крайовими умовами. У роботі розглядається лінійне інтегральне неоднорідне рівняння Фредгольма II роду

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x). \quad (1)$$

де  $f(x)$  – задана функція, визначена на  $[a, b]$ , ядро  $K(x, s)$  – задана функція, визначена у квадраті  $Q(x, s) = \{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$ ,  $y(x)$  – шукана функція (розв’язок рівняння) [1]. До таких інтегральних рівнянь приходять при математичному моделюванні, наприклад, в задачах визначення інтенсивності народження часток в атмосфері під впливом світлового потоку, оптимальної лінійної фільтрації за наявності білого шуму, в задачах про вимушені поперечні коливання струни та ін. [1; 2].

На практиці одним із найпоширеніших методів розв’язання рівняння (1) є метод заміни інтеграла скінченною сумою з використанням тієї чи іншої квадратурної формули (прямокутників, трапецій, Сімпсона тощо) [1; 3]. Значення  $y_1, \dots, y_m$  розв’язку у вузлах  $x_1, \dots, x_m$ , які відповідають вибраній квадратурній формулі, знаходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. По цих значеннях за допомогою інтерполяції отримують наближений розв’язок інтегрального рівняння (1) на усьому відрізку  $[a, b]$ .

Для розв’язання рівняння (1) використовують також метод заміни ядра на вироджене [1; 3; 4]. Порядок системи рівнянь, яку необхідно розв’язувати у цьому методі, як правило, значно менший, ніж у методі квадратур. Для знаходження виродженого ядра, близького до заданого, використовують розклад  $K(x, s)$  у ряд Тейлора або в ряд Фур’є [3], найкращу апроксимацію  $K(x, s)$  білінійною комбінацією функцій однієї змінної [5–7] та ін.

Для розв’язання рівнянь Фредгольма II роду застосовуються ітераційні методи, наприклад, послідовних наближень [1; 3], простої ітерації [1], Положія [1], гомотопічного збурення [8; 9], декомпозиції Адоміана [9; 10] (деякі з них використовуються і у випадку нелінійних рівнянь).

Проекційні та варіаційні методи (моментів, колокації, найменших квадратів, Рітца тощо

[1–5]) ґрунтуються на представленні наближеного розв’язку  $y_n(x)$  рівняння (1) функцією певного вигляду

$$y_n(x) = \Phi(x; c_1, \dots, c_n), \quad (2)$$

що залежить від параметрів  $c_1, \dots, c_n$ . Невідомі  $c_i$  визначають таким чином, щоб мінімізувати деякий функціонал від інтегральної нев’язки, яка утворюється при підстановці функції  $y_n(x)$  замість  $y(x)$  в рівняння (1). Як правило, це приводить до необхідності розв’язання системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $c_1, \dots, c_n$ . Проекційні методи можна застосовувати також для розв’язання нелінійних інтегральних рівнянь, але у цьому випадку система для знаходження  $c_i$  буде нелінійною [3].

Як відомо, при розв’язанні крайових задач для диференціальних рівнянь також використовується методи пошуку параметрів наближеного розв’язку шляхом мінімізації норми диференціальної нев’язки. У роботах [11; 12] було показано ефективність використання у таких випадках еволюційних алгоритмів, а саме диференціальної еволюції та генетичного алгоритму.

**Мета роботи** – адаптувати алгоритм диференціальної еволюції (ДЕ) для знаходження оптимальних значень параметрів наближених розв’язків інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.

**Формулювання задачі.** Розглядаємо задачу знаходження наближеного розв’язку  $y_n(x)$  лінійного інтегрального рівняння Фредгольма II роду (1) з невиродженим ядром. Вибираємо  $y_n(x)$  у вигляді функції (2), що лінійно залежить від вільних параметрів  $c_1, \dots, c_n$

$$y_n(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x), \quad (3)$$

де  $\phi_1, \dots, \phi_n$  – задані лінійно незалежні функції, які називаються координатними. Функцію  $\phi_0(x)$ , зокрема, можна покласти  $\phi_0(x) = f(x)$  або  $\phi_0(x) = 0$ . Після підстановки функції (3) в рівняння (1) і переносу усіх членів рівняння в один бік, отримуємо інтегральну нев’язку  $\mu$ :

$$\mu(x; c_1, \dots, c_n) = \psi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x), \quad (4)$$

де

$$\psi_0(x, \lambda) = \phi_0(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \phi_0(s) ds - f(x),$$

$$\psi_i(x, \lambda) = \phi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \phi_i(s) ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

Точний розв'язок перетворює нев'язку (4) в нуль. Слід зауважити, що при строгому розгляді питання близькості наближеного і точного розв'язків за величиною нев'язки потрібно залучення відповідних оцінок [13, 14].

Невідомі коефіцієнти  $c_1, \dots, c_n$  будемо визначати з умови

$$\|\mu(x; c_1, \dots, c_n)\| \rightarrow \min_{c_1, \dots, c_n}, \quad (5)$$

де  $\|\cdot\|$  – деяка задана норма функції. На практиці найпопулярніші такі норми:

– квадратична

$$\|\mu(x; c_1, \dots, c_n)\|_2 = \sum_{k=1}^m \mu^2(x_k; c_1, \dots, c_n), \quad (6)$$

– рівномірна (або чебишовська)

$$\|\mu(x; c_1, \dots, c_n)\|_C = \max_{k=1, \dots, m} |\mu(x_k; c_1, \dots, c_n)|, \quad (7)$$

– сума модулів значень функції

$$\|\mu(x; c_1, \dots, c_n)\|_1 = \sum_{k=1}^m |\mu(x_k; c_1, \dots, c_n)|, \quad (8)$$

де  $x_1, \dots, x_m$  – точки деякої сітки  $E_m \subset [a, b]$ .

Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$ , то взявши достатньо велику кількість параметрів  $n$ , можна знайти розв'язок  $y(x)$  інтегрального рівняння (1) з будь-якою наперед заданою точністю [4, с. 172].

При традиційному підході для кожної з перелічених норм використовується свій метод пошуку оптимальних значень параметрів, на яких досягається мінімум відповідної норми інтегральної нев'язки. Наприклад, у випадку норми (6) застосовується метод найменших квадратів (дискретний варіант) [3, 4], в якому прирівнюють до нуля похідні функції (6) по  $c_1, \dots, c_n$ . У випадку норми (7) використовують методи і програмні засоби найкращого рівномірного наближення функції узагальненим поліномом [15; 16].

У статті для знаходження оптимальних значень параметрів  $c_1, \dots, c_n$  пропонується адаптувати алгоритм диференціальної еволюції (ДЕ) [17], який розроблено для пошуку глобального оптимуму недиференційовних, нелінійних, мультимодальних функцій багатьох змінних. Алгоритм простий у програмній реалізації, дозволяє використовувати різні норми нев'язки [12; 18] і потребує обчислення лише значень цільової функції (критерію оптимізації), але не її похідних.

**Алгоритм.** Алгоритм ДЕ входить у групу еволюційних алгоритмів, які моделюють базові процеси біологічної еволюції – схрещування, мутацію та селекцію. В алгоритмі ДЕ еволюційний процес починається зі створення початкової популяції векторів, які у закодованому вигляді представляють собою можливі

розв'язки задачі оптимізації [17]. До них послідовно застосовуються операції мутації, схрещування і селекції, щоб сформувати наступну популяцію векторів, значення цільової функції яких будуть кращими, ніж у векторів попередньої популяції. Вказана послідовність повторюється до тих пір, поки не виконається задана термінальна умова [17].

Схема алгоритму для розв'язання рівняння (1) модифікована порівняно з описаною вище стандартною схемою ДЕ і не містить операції схрещування. Як показано в [12], для створення потрібного різноманіття векторів популяції можна обмежитися операцією мутації, оскільки вплив схрещування на еволюцію при розв'язанні подібної задачі вкрай незначний.

Нижче наводиться покрокова схема алгоритму ДЕ для знаходження оптимальних значень параметрів наближеного розв'язку рівняння (1).

1. Генерується початкова популяція базових векторів  $V_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , де  $N$  – розмір популяції. Координати  $v_{i1}, \dots, v_{in}$  вектора  $V_i$  – випадкові дійсні числа з відрізка  $[-1, 1]$  (у наступних популяціях значення координат можуть виходити далеко за межі вказаного проміжку).

2. Для кожного базового вектора  $V_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$  обчислюються значення цільової функції  $F(V_i)$ :

$$F(V_i) = \|\mu(x; v_{i1}, \dots, v_{in})\|, \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Для цього відрізок  $[a, b]$  замінюється сіткою  $E_m = \{x_1, \dots, x_m\}$  з  $m$  точок, і на цій сітці в залежності від вибраної норми наближення – квадратичної, рівномірної або суми модулів значень функції – обчислюється норма  $\mu$  за формулами (6), (7) або (8) відповідно.

3. Для базового вектора  $V_i$  створюється мутантний вектор  $\widehat{V}_i$ :

$$\widehat{V}_i = V_{r_1} + Fm \cdot (V_{r_2} - V_{r_3}), \quad i = 1, \dots, N,$$

де  $Fm \in (0, 2]$  – заданий коефіцієнт мутації,  $r_1, r_2, r_3$  – випадкові цілі числа з проміжку  $[1, N]$ ,  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ , і за формулою (9) обчислюється  $F(\widehat{V}_i)$ .

4. За допомогою селекції здійснюється формування наступної популяції векторів. Якщо  $F(\widehat{V}_i) < F(V_i)$ , то в наступну популяцію включається вектор  $\widehat{V}_i$ , у протилежному випадку – базовий вектор  $V_i$ .

5. Якщо кількість популяцій не перевищує задане максимальне число популяцій  $Gen$ , то здійснюється перехід на п. 3. У протилежному випадку – в популяції з номером  $Gen$  визначається вектор  $V^*$ , який має найменше значення цільової функції  $F(V^*) = \min F(V_i)$ , і алгоритм завершується. Координати вектора  $V^*$  представляють собою оптимальні значення  $c_1^*, \dots, c_n^*$  коефіцієнтів наближеного розв'язку (3) інтегрального рівняння (1).



Розмір популяції  $N$ , коефіцієнт мутації  $Fm$  і максимальне число популяцій  $Gen$  є параметрами налаштування запропонованого алгоритму ДЕ. При розв'язанні задачі (5) рекомендується вибирати  $N$  і  $Fm$  у таких діапазонах:  $5n \leq N \leq 10n$ ,  $0,4 \leq Fm \leq 0,6$ . Вибір параметра  $Gen$  залежить від числа невідомих коефіцієнтів  $n$ . З ростом  $n$  доцільно збільшувати і значення параметра  $Gen$  (див. далі приклади 1 і 2).

**Аналіз результатів обчислювального експерименту.** Запропонований алгоритм ДЕ реалізовано засобами системи комп'ютерної математики Matlab, і проведено обчислювальний експеримент по розв'язанню низки тестових рівнянь Фредгольма II роду. Далі наведено приклади розв'язання інтегральних рівнянь за алгоритмом ДЕ та порівняння отриманих наближених розв'язків з відомими точними розв'язками.

**Приклад 1.** Розв'язується інтегральне рівняння [4]

$$y(x) - \int_0^1 \frac{s^2 y(s)}{x^2 + s^2} ds = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}. \quad (10)$$

Його наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_2(x) = c_1 + c_2 x.$$

У цьому випадку інтегральна нев'язка має вигляд

$$\mu(x; c_1, c_2) = -c_1 x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + c_2 \left[ x - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] - x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

За алгоритмом ДЕ з параметрами  $N = 20$ ,  $Fm = 0,5$  і  $Gen = 30$  знайдено такі оптимальні значення коефіцієнтів і цільової функції для випадку рівномірної норми (7) на рівномірній сітці  $E_{101}$ :

$$c_1^* = -1, c_2^* = -1, F(V^*) \equiv \left\| \mu(x; c_1^*, c_2^*) \right\|_C = 0.$$

Отже, шуканим розв'язком рівняння (10) є функція  $y_2(x) = -1$ . Рівність цільової функції нулю свідчить про те, що знайдений розв'язок  $y_2(x)$  є точним (це також легко перевірити, підставивши його у рівняння).

**Приклад 2.** Розв'язується інтегральне рівняння [1]

$$y(x) - \int_{-1}^1 (xs + x^2)y(s) ds = 1. \quad (11)$$

Наближений розв'язок рівняння (11) шукаємо у вигляді

$$y_3(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad (12)$$

де за координатні функції взято поліноми Лежандра. При підстановці функції (12) у рівняння (11) маємо інтегральну нев'язку

$$\mu(x; c_1, c_2, c_3) = c_1(1 - 2x^2) + c_2 \frac{x}{3} + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} - 1.$$

За алгоритмом ДЕ з налаштуваннями  $N = 30$ ,  $Fm = 0,6$  і  $Gen = 60$  на рівномірній сітці  $E_{201}$  отримано такі результати:

$$c_1^* = 3, c_2^* = 0, c_3^* = 4,$$

$$F(V^*) \equiv \left\| \mu(x; c_1^*, c_2^*, c_3^*) \right\|_2 = 0.$$

Таким чином, наближеним розв'язком рівняння (11) є  $y_3(x) = 1 + 6x^2$ . Легко перевірити, що це точний розв'язок рівняння (11).

**Висновки.** У статті для знаходження оптимальних значень параметрів наближених розв'язків лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду адаптовано алгоритм ДЕ. Він простий у програмній реалізації та застосуванні (містить мало параметрів налаштування), дозволяє використовувати різні норми інтегральної нев'язки і потребує обчислення лише значень цільової функції, але не її похідних. Схема алгоритму модифікована порівняно зі стандартною і не містить операції схрещування. Це дозволило спростити алгоритм без шкоди для точності. Як показали результати обчислювального експерименту на тестових прикладах, для знаходження оптимальних значень параметрів шуканих наближених розв'язків цілком достатньо операцій мутації та селекції. Запропонований алгоритм можна розглядати як додатковий інструмент до відомих проєкційних методів розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду. У подальшому планується поширити підхід із використанням ДЕ на нелінійний випадок.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы*. Київ : Наукова думка, 1986. 544 с.
2. Федорчук В.А., Іванюк В.А., Верлань Д.А. *Интегральні рівняння в задачах математичного моделювання*. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. 144 с.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений. Т.2*. Москва : Наука, 1966. 640 с.
4. Манжиров А.В., Полянин А.Д. *Методы решения интегральных уравнений. Справочник*. Москва : Факториал, 1999. 272 с.
5. Вакал Л.П. Застосування чебишовської апроксимації при розв'язанні інтегральних рівнянь. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2011. № 10. С. 78–84.
6. Верлань Д.А. Градиентный алгоритм билинейной аппроксимации ядер при решении интегральных уравнений Фредгольма II-го рода. *Электронное моделирование*. 2013. Т. 35, № 1. С. 73–80.

7. Вакал Є., Вакал Ю., Вакал Л. Найкраща апроксимація ядра інтегрального рівняння Фредгольма з використанням генетичного алгоритму. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка*. 2016. Вип. 2 (36). С. 17–22.
8. Ganji D. D., Afrouzi G. A., Hosseinzadeh H., Talarposhti R. A. Application of homotopy-perturbation method to the second kind of nonlinear integral equations. *Physics Letters A*. 2007. Vol. 371, N 1–2. P. 20–25.
9. Abbasbandy S. Numerical solutions of the integral equations: homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*. 2006. Vol. 173, N 1. P. 493–500.
10. Babolian E., Biazar J., and A. R. Vahidi A.R. The decomposition method applied to systems of Fredholm integral equations of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*. 2004. Vol. 148, N 2. P. 443–452.
11. Vakal L.P. Using genetic algorithm for solving boundary value problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, N 8. P. 52–62. URL: <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i8.50>.
12. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь за алгоритмом диференціальної еволюції. *Математичні машини і системи*. 2020. № 1. С. 43–52. URL : <https://doi.org/10.34121/1028-9763-2020-1-43-52>.
13. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. Москва : Наука, 1970. 512 с.
14. Zemyan S.M. *The classical theory of integral equations: a concise treatment*. New York : Birkhauser Boston Inc., 2012. 344 p.
15. Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П. Пакет программ аппроксимации функций. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2008. № 7. С. 32–38.
16. Vakal L.P. Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 6. P. 49–59. URL : <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i6.50>.
17. Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–359.
18. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Розв'язання перевизначеної системи трансцендентних рівнянь з використанням диференціальної еволюції. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*. 2017. Вип. 15. С. 24–30.

#### REFERENCES

1. Verlan' A.F., Sizikov V.S. (1986) *Integral'nyye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kyiv: Naukova dumka. (in Russian).
2. Fedorchuk V.A., Ivanyuk V.A., Verlan' D.A. (2014) *Intehral'ni rivnyannya v zadachakh matematychnoho modelyuvannya* [Integral equations in mathematical simulation problems]. Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi national university. (in Ukrainian).
3. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1966) *Metody vychisleniy. T. 2* [Methods of computations/ V. 2]. Moscow: Nauka. (in Russian).
4. Manzhairov A.V., Polyinin A.D. (1999) *Metody resheniya integral'nykh uravneniy. Spravochnik* [Methods for solving integral equations. Handbook]. Moscow: Factorial. (in Russian).
5. Vakal L.P. (2011) Zastosuvannya chebyshevskoyi aproksymatsiyi pry rozv'yazanni intehral'nykh rivnyan' [Using chebyshev approximation to solve integral equations]. *Computer means, networks and systems*, no. 10, pp. 78–84. (in Ukrainian).
6. Verlan' D.A. (2013) Gradiyentnyy algoritm bilineynoy aproksimatsii yader pri reshenii integral'nykh uravneniy Fredgol'ma II roda [Gradient algorithm for kernels bilinear approximation for solving Fredholm integral equations of the second kind]. *Electronic modeling*, vol. 35, no. 1, pp. 73–80. (in Russian).
7. Vakal Ye., Vakal Yu., Vakal L. (2016) Naykrashcha aproksymatsiya yadra intehral'noho rivnyannya Fredhol'ma z vykorystannyam henetychnoho alhorytmu [Best approximation of Fredholm integral equation kernel with using genetic algorithm]. *Bulletin Taras Shevchenko national university of Kyiv. Mathematics. Mechanics*, no. 2 (36). pp. 17–22. (in Ukrainian).
8. Ganji D. D., Afrouzi G. A., Hosseinzadeh H., Talarposhti R. A. (2007) Application of homotopy-perturbation method to the second kind of nonlinear integral equations. *Physics Letters A*, vol. 371, no. 1–2, pp. 20–25.
9. Abbasbandy S. (2006) Numerical solutions of the integral equations: homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 173, no. 1, pp. 493–500.



10. Babolian E., Biazar J., Vahidi A.R. (2004) The decomposition method applied to systems of Fredholm integral equations of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 148, no. 2, pp. 443–452.
11. Vakal, L.P. (2015). Using genetic algorithm for solving boundary value problems. *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 47, no. 8, pp. 52–62. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i8.50>.
12. Vakal, L.P., Vakal, Y.S. (2020). Rozv'iazannia kraiovykh zadach dlia zvychnykh dyferentsialnykh rivnian za alhorytmom dyferentsialnoi evoliutsii [Solving boundary value problems for ordinary differential equations with differential evolution algorithm]. *Mathematical machines and systems*, no. 1, pp. 43–52. (in Ukrainian).
13. Mikhlin S.G. (1970) *Variatsionnyye metody v matematicheskoy fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow: Nauka. (in Russian).
14. Zemyan S.M. (2012) *The classical theory of integral equations: a concise treatment*. New York: Birkhauser Boston Inc.
15. Kalenchuk-Porkhanova A.A., Vakal L.P. (2008) Paket programm approksimatsii funktsiy [Function approximations package]. *Computer means, networks and systems*, no. 7, pp. 32–38. (in Russian).
16. Vakal, L.P. (2016) Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 48, no.6, pp. 49–59. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i6.50>.
17. Storn, R., Price, K. (1997). Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, vol. 11, pp. 341–359.
18. Vakal L.P., Vakal Ye.S. (2017) Rozv'yazannya perevyznachenoyi systemy transtsendentnykh rivnyan' z vykorystannyam dyferentsial'noyi evolyutsiyi [Solving an overdetermined system of transcendental equations using differential evolution]. *Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences*, vol. 15, pp. 24–30. (in Ukrainian).

## NUMERICAL SIMULATION OF A SOLITARY WAVE INTERACTION WITH SUBMERGED OBSTACLES

**Gorban I. M.**

*PhD, Senior Research Fellow,*

*Senior Research Fellow at the Department of Technical Hydromechanics  
Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*

*Marii Kapnist str., 8/4, Kyiv, Ukraine*

*orcid.org/0000-0001-9662-2813*

*ivgorban@gmail.com*

**Korolova A. S.**

*PhD,*

*Senior Research Fellow at the Department of Technical Hydromechanics  
Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*

*Marii Kapnist str., 8/4, Kyiv, Ukraine*

*orcid.org/0000-0003-0693-4552*

*kan5nas@gmail.com*

**Key words:** *wave propagation, free surface, wave-structure interactions, vortex field, vertical barrier, method of boundary integral equations, vortex method.*

The propagation of a solitary wave over a submerged obstacle installed at the channel bottom is numerically investigated. The topic is closely related to the operation of protective structures in natural bodies of water used for dissipation of wave energy. The developed numerical technique couples the method of boundary integral equations used to determine the free surface deformations and the vortex scheme for modeling the vortex field generated by the wave. In order to examine the validity of the model, the calculated free surface elevations were compared for a special case with corresponding data of the experimental research conducted in the hydrodynamic flume of the Institute of Hydromechanics. The comparison has been demonstrated that the present numerical scheme provides a good estimate as of reflected as of transmitted waves, which form above a submerged obstacle. Systematic calculations of the propagation of a solitary wave over submerged vertical barriers of different heights and lengths are performed. Their results point out that the type of interaction of a solitary wave with a barrier depends on the coefficient, which is the ratio of the incident wave amplitude to the thickness of the water column over the obstacle. When its value is less than the critical value, which is about 1, the incident wave splits smoothly into reflected and transmitted solitons and it breaks down otherwise causing chaotic oscillations of the free surface. The detail investigation of the vortex flow generated by the solitary wave near a vertical barrier detected two large-scale opposite vortices forming one after another at the obstacle tip. Interacting with the obstacle and channel bottom, the vortices grow to the size of the water depth and are shed to the flow in both the upstream and downstream directions. The vortices specify generation of water flows and intensity of turbulent processes near the obstacle. It is revealed that the influence of the vortex field on the stability of the submerged obstacle depends on its height. When the barrier is tall, the vortices go up to the free surface and are carried away by the collinear flow. In the case of a low obstacle, the vortex flow dissipates in its vicinity causing bottom erosion in this region.

## ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ СОЛІТОННОЇ ХВИЛІ ІЗ ЗАНУРЕНИМИ ПЕРЕШКОДАМИ

**Горбань І. М.**

*кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник,  
старший науковий співробітник відділу технічної гідромеханіки  
Інститут гідромеханіки Національної академії наук України  
вул. Марії Канніст, 8/4, Київ, Україна  
orcid.org/0000-0001-9662-2813  
ivgorban@gmail.com*

**Корольова А. С.**

*кандидат фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник відділу технічної гідромеханіки  
Інститут гідромеханіки Національної академії наук України  
вул. Марії Канніст, 8/4, Київ, Україна  
orcid.org/0000-0003-0693-4552  
kan5nas@gmail.com*

**Ключові слова:** поширення хвилі, вільна поверхня, взаємодія хвилі з конструкцією, вихрове поле, вертикальний бар'єр, метод граничних інтегральних рівнянь, вихровий метод

Чисельно досліджується поширення солітонної хвилі в каналі, на дні якого встановлено занурену перешкоду. Ця проблема тісно пов'язана з експлуатацією захисних споруд для розсіювання енергії хвиль у природних водоймах. Розвинена модель поєднує метод граничних інтегральних рівнянь, що застосовується для визначення деформацій вільної поверхні, і вихрову схему для розрахунку вихрового поля, яке генерується хвилею. Для її валідації залучені дані аналогічних експериментальних досліджень, що проводилися в гідравлічному лотку Інституту гідромеханіки. Збіг експериментальних та чисельних результатів щодо еволюції вільної поверхні вказує на те, що запропонована теоретична модель адекватно описує параметри як прохідної, так і відбитої хвилі, які утворюються над зануреною перешкодою. Виконані розрахунки поширення солітонної хвилі над зануреними вертикальними бар'єрами різної висоти та довжини. З їхніх результатів випливає, що тип взаємодії солітонної хвилі з бар'єром залежить від коефіцієнту, який є відношенням амплітуди падаючої хвилі до товщини стовпа води над перешкодою. Коли його значення менше за критичне, яке становить приблизно 1, падаюча хвиля м'яко поділяється на відбитий та прохідний солітони. В іншому разі вона руйнується, що викликає хаотичні коливання вільної поверхні. Детальне дослідження вихрової течії, яка генерується солітонною хвилею поблизу бар'єру, виявило в цій області два великих протилежно спрямованих вихори, що послідовно утворюються на вершині бар'єру. Взаємодіючи з перешкодою та дном каналу, вони зростають до розмірів, співставних з глибиною води, та відриваються. Один із них рухається за течією, інший – проти неї. Ці вихори визначають розвиток течій та інтенсивність турбулентних процесів поблизу перешкоди. Отримано, що вплив вихрового поля на стійкість зануреної конструкції залежить від її висоти. Коли бар'єр високий, вихори піднімаються і зносяться супутньою течією. У разі низької перешкоди вихровий потік дисипує поблизу неї, спричиняючи ерозію дна в цій області.

**Introduction.** The interaction of surface waves with submerged obstacles in shallow water is a classic problem of coastal and marine hydrodynamics. The topic is closely related to the construction of submerged protective structures dissipating wave energy and preventing coastal erosion. Besides, it deals with natural factors that may lead to dangerous processes in coastal zones such as the wave propagation over coral reefs or continental shelf. The importance of the problem has led to a large number of theoretical and experimental studies over the past decades. In most of them, a solitary wave is considered owing to unique relationship between wave nonlinearity and steepness that reduces the number of important parameters to one [1]. Solitary waves present a limiting condition for the run-up of an extreme non-linear long wave, such as tsunami [2]. Besides, the connection of the solitary solution with ocean waves is ensured by the fact that periodic waves in deep water are unstable and break up into groups whose circumferential line has the properties of a soliton [3].

Earlier researches were based on the solitary wave theories in the shallow water such as Boussinesq and the KdV equations [4; 5]. The models predict accurately the reflected and transmitted waves within of its applicability but calculate higher wave amplitudes as compared with experimental data for strongly non-linear problems [5; 6]. To overcome this restriction, the Boundary Element Method (BEM) was applied. The BEM is based on the potential flow theory and adapted to solve the Laplace equation with nonlinear boundary conditions on the free surface. Using this approach, Grilli et al. [7] described the wave breaking above obstacles of different shape. The influence of wave amplitude and obstacle parameters on wave behavior was described in [7], where the BEM was applied for studying the interaction of a solitary wave with a submerged semicircular cylinder. One of the latest applications of the potential theory to calculation of wave evolution is simulation of the interaction of a solitary wave with a wave energy converter in the presence of bottom irregularities and collinear currents [9].

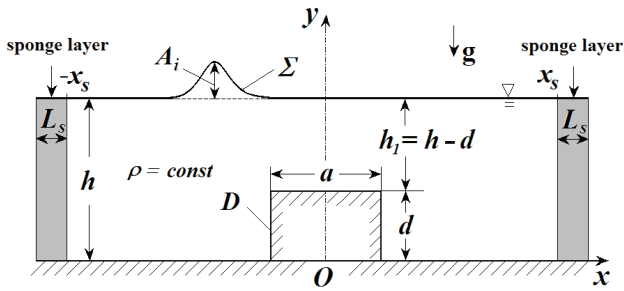
It is well known that the solitary wave passing over a submerged obstacle causes intense vortical flows inside the water column which strongly affect the wave energy and stress distribution on the bed. The potential theory with irrotational flow assumption is not suitable to investigate the flow separation and generation of vortex field near the structure. To take into account the above-mentioned effects, the numerical methods based on the viscous flow equations were developed. The volume of fluid (VOF) and mark-and-cell chart (MAC) methods are two main approaches for modeling viscous fluid flows with strong nonlinearity on a free surface. Those employ the Reynolds Averaged Navier–Stokes (RANS)

equations with a  $k-\varepsilon$  non-linear turbulence closure model [10]. Basing on these approaches, significant advances have been made in understanding the phenomena accompanying the interaction of a solitary wave with submerged obstacles [11; 12; 13].

The great disadvantages of the grid-based numerical schemes are the difficulty in tracking the fluid interface and implementation of the free surface boundary conditions, especially when a moving grid is used. An alternate approach is using the Lagrangian-type numerical schemes which model a free surface by a system of singularities moving with the fluid particles. It allows reducing the initial boundary value problem of determining the free surface configuration to a system of the integral equations in respect to the strength of singularities [14]. In this approach, the generation of vorticity by the free surface is predominantly neglected, which greatly simplifies the boundary conditions. One can find examples of the use of the Lagrangian scheme in papers [15; 16], where interaction of a solitary wave with a submerged rectangular structure is considered. Note the viscous flow under the free surface is calculated with the vortex method, which is based on the velocity-vorticity form of the Navier-Stokes equations. The vortex field is shown to be the main factor determining the drag of the structure.

A similar theoretical model is developed in the present study. Its difference from the previous schemes lies in the simpler involvement of the free surface dynamic condition, which, nevertheless, does not affect the calculation results. Taking into account that the generation of vorticity at the free surface is ignored, the vortex scheme developed by authors in paper [17] can be utilized for viscous simulation. The validity and efficiency of this algorithm has been confirmed when solving various two-dimensional problems of viscous fluid dynamics [18; 19; 20]. In order to verify the mathematical model, a set of laboratory experiments in the hydrodynamic flume was performed with a solitary wave passing above a vertical barrier. In both the numerical simulation and experiment, the free surface elevations were measured in the given locations and the obtained results were compared. A good match between the data of the calculations and the physical experiment was obtained as for reflected as for transmitted wave.

**Problem statement.** A solitary wave travelling in viscous incompressible fluid over a submerged rectangular obstacle of height  $d$  and length  $a$  is considered (Fig. 1). A Cartesian coordinate system is fixed such that its origin is connected with the midpoint of the obstacle, the  $x$ -axis lies in the bottom and the  $y$ -axis points vertically upward. The still water depth is  $h$  and the amplitude of the incident wave is  $A_i$ . Taking into account that the fluid in the flume is under the action of gravity, its motion is governed by the



**Fig. 1. Schematic diagram of the numerical flume with a solitary wave passing over a submerged rectangular obstacle**

following system of equations:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}, \quad (2)$$

where the hydrodynamic pressure  $P$  is equal to the total pressure  $p$  minus the hydrostatic pressure:  $P = p + y/Fr^2$ ,  $\vec{V}$  is the velocity and  $t$  is the time. The variables in (1), (2) are scaled by the still water depth  $h$  and the phase speed of linear long-wave  $\sqrt{gh}$ , where  $g$  is the acceleration due to the gravity;  $\bar{t} = t\sqrt{gh}/h = t\sqrt{g/h}$  is the dimensionless time (the overline in (2) and further is omitted). The Reynolds number is evaluated based on the depth-averaged velocity under the wave crest  $U = \frac{A_i}{h}c$ , where  $c = \sqrt{g(h+A_i)}$  is the wave celerity, then  $\text{Re} = Uh/\nu = A_i\sqrt{g(h+A_i)}/\nu$ . The Froude number is introduced as  $Fr = c/\sqrt{gh}$ .

The kinematics boundary condition at the free surface  $\Sigma$  forces the surface to follow the trajectories of the fluid particles  $z_\Sigma$  lying on it. This means that the following evolutionary equation is realized:

$$\frac{dz_\Sigma}{dt} = \vec{V}_\Sigma. \quad (3)$$

The dynamic condition declares the continuity of stresses when jumping across a free surface. It is written under the assumption that the surface tension and viscosity are neglected:

$$p_\Sigma = p_a, \quad (4)$$

where  $p_a$  denotes the atmosphere pressure.

The non-leaking and no-slip boundary conditions must be required at the bottom:

$$\vec{V}(\vec{r}_b, t) \cdot \vec{n} = 0, \quad (5)$$

$$\vec{V}(\vec{r}_b, t) \cdot \vec{\tau} = 0, \quad (6)$$

where  $\vec{r}_b$  denotes the radius-vector of bottom points,  $\vec{n}$ ,  $\vec{\tau}$  are the normal and tangential unit vector on the bottom, respectively.

To avoid the wave reflection at the lateral boundaries of the numerical wave flume, wave damping is

introduced following the method proposed in [14]. For this reason, numerical sponge layers are put at both lateral boundaries to absorb the outward-traveling waves.

**Numerical model.** Boundary value problem (1)-(6) is solved using the numerical model that combines the boundary integral equation method calculating the free surface evolution and the vortex scheme for simulation of the viscous flow near an obstacle. It has been described in details in papers [17; 18] therefore generalities of the model are only considered here.

Since the vorticity generation at the free surface is ignored, the flow is irrotational far from the submerged structure. At the same time, the wave motion causes an intense vortical flow in close proximity to the structure. Following the Helmholtz decomposition principle [21], the flow under consideration is decomposed into the potential part in the thin layer near the free surface and the rotational part everywhere except the fluid boundary. Then the velocity field is represented by the sum:

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \nabla\phi + \nabla \times (\Phi\vec{k}), \quad (7)$$

where  $\vec{r}$  denotes the radius-vector of a point,  $\phi$  and  $\Phi\vec{k}$  are the scalar and vector potential of the irrotational and vortical flows,  $\vec{k}$  is the unit vector out of the page.

In the present model, the vortex flow is described by the function of vorticity  $\omega = \vec{k} \cdot \nabla \times \vec{V}$ . To take into account the free surface and bottom irregularity, the method of boundary integral equations is applied. According to this approach, the free surface and the underwater obstacle boundary are modeled by vortex distributions of strength  $\mu$  and  $\gamma$  respectively [14; 17]. According to these assumptions, velocity field (7) is written by the following equation:

$$\begin{aligned} \vec{V}(\vec{r}, t) = & \nabla \int_{\Sigma} \mu(\vec{r}', t) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \vec{n}} dl(\vec{r}') + \\ & + \nabla \int_D \gamma(\vec{r}', t) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \vec{n}} dl(\vec{r}') + \\ & + \int_S \omega(\vec{r}', t) \vec{k} \times \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') ds(\vec{r}'), \end{aligned} \quad (8)$$

where  $\Sigma$ ,  $D$  denote the free surface and the boundary of obstacle respectively,  $S$  is the viscous flow domain,  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  is the Green function for a point vortex in the half-plane [21].

For convenience, we describe the flow field with a complex coordinate  $z = x + iy$ . The free surface  $\Sigma$  and obstacle boundary  $D$  are parameterized in terms of linear parameters  $e$  and  $s$  respectively, which are the Lagrangian coordinates of the points lying on these interfaces. The vorticity field  $\omega$  is approximated by a set of vorticity carrying particles as proposed in [22]:

$$\omega(z, t) \approx \sum_{j=1}^N \Gamma_j^*(t) f_\delta^*(z - z_j), \quad (9)$$



where  $\Gamma_j^*$  and  $z_j$  are the circulation and coordinate of the  $j$ -th vortex,  $N$  is the number of free vortices,  $f_\delta$  is the distribution function of vortex.

Within this approach, equation (8) can be rewritten as:

$$\begin{aligned} \vec{V}(z, t) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \mu(e', t) \left[ \frac{1}{z - z(e', t)} - \frac{1}{z - z^*(e', t)} \right] de' + \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_D \gamma(s', t) \left[ \frac{1}{z - z(s')} - \frac{1}{z - z^*(s')} \right] ds' \\ & + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \Gamma_j^* \left[ \frac{1}{z - z_j(t)} - \frac{1}{z - z_j^*(t)} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

where the asterisk denotes conjugation about the  $Ox$ -axis. Note the principal value of the integrals is considered in (10) in order to avoid singularities.

In the discrete scheme, the continuous vortex sheets located along  $\Sigma$  and  $D$  are replaced by sets of the panels of length  $\Delta e$  and  $\Delta s$ . Complex coordinates of the panels are:

$$(z_{\Sigma})_m(t) = z_{\Sigma}(e_m, t), (z_D)_k = z_D(s_k), \quad (11)$$

where  $m = 1, 2, \dots, N_{\Sigma}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_D$ ,  $N_{\Sigma}$ ,  $N_D$  are the numbers of the panels. The strengths  $\mu(s, t)$  and  $\gamma(s, t)$  are assumed to be constant along a panel, so we deal with distributions of the piecewise continuous functions:

$$\mu_m(t) = \mu(e_m, t), \gamma_k(t) = \gamma(s_k, t). \quad (12)$$

To determine these functions, free surface dynamic condition (4) and non-leaking condition (5) are applied in accordance with the technique developed in [23]. It involves solving the evolutionary equations for  $(z_{\Sigma})_m$  and  $\phi_m$ . The first of them is kinematic condition (3), and the second follows from dynamic condition (4). Then the system of linear algebraic equations with respect to  $\mu_m(t)$  and  $\gamma_k(t)$  is solved. One can find a detailed description of this method in paper [18].

Following [10], we utilize a fourth-order Adams–Bashforth–Moulton (ABM) predictor-corrector scheme to integrate the evolutionary equations for  $(z_{\Sigma})_m$  and  $\phi_m$ . The regularization procedure is fulfilled in the end of a time step to eliminate numerical instabilities on the computed free surface. According to this procedure, the panel lengths are recalculated so that all segments should be equal. Additionally, the strength function  $\mu_m(t)$  is changed on the  $m$ -th panel proportionally to the new value of  $\Delta e$ . Note that the number of panels at the free surface does not change during the entire modeling process. This regularization improves considerably the stability of free-surface computations that allows extending the range of parameters of the problem under consideration at which the simulation will be successful. In particular, breaking solitary waves are considered together with regular processes.

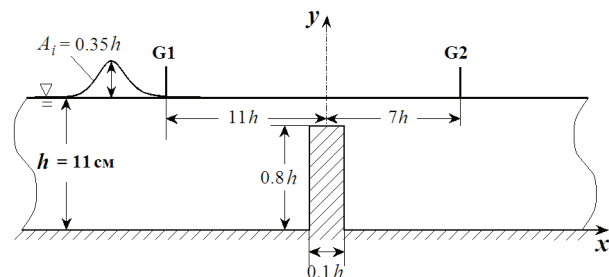
Wave reflection on side walls of the numerical flume is eliminated with the help of the sponge lay-

ers damping perturbations of the scheme parameters. This way involves the incorporation of additional damping terms into the evolutionary equations as for points  $(z_{\Sigma})_m$  as for potential  $\phi_m$ . For the first time, the technique was proposed in [24] and since then it has been successfully used when integrating the problems with a free-surface [11; 13].

In this study, modeling the evolution of a solitary wave when it passes over a submerged obstacle is coupled with calculations of the vorticity field generated by the wave. The last are performed with the well-known vortex method [22], which applies the velocity–vorticity form of the Navier–Stokes equations instead the traditional pressure–velocity formulation. If one takes the curl of the Navier–Stokes equations, the pressure field will be eliminated including the component associated with gravity. Taking into account that the generation of vorticity at the free surface is neglected, the vortex scheme developed by us in paper [17] can be utilized for viscous simulation. The validity and efficiency of this algorithm has been confirmed when solving various two-dimensional problems of viscous fluid dynamics [18; 19; 20].

**Model verification.** The developed numerical model has applied by us for simulation of solitary wave propagation over a step [18]. Comparison of the obtained results with the experimental data from paper [25] shown that the simulation predicted accurately the fission process with respect the dependence of the number of secondary solitons on the incident wave amplitude and step height.

In this study, the model’s ability to simulate accurately the evolution of a free surface is verified against laboratory experiments with a solitary wave passing over a submerged vertical thin barrier. The experiments were conducted in a glass-wall flume of the Institute of Hydromechanics. The laboratory setup, equipment and experimental technique have been described in detail in paper [26]. Fig. 2 illustrates the normalized parameters of the problem under consideration as well as positions of the gauges utilized to fix free surface elevations as in laboratory experiment as in numerical modeling.



**Fig. 2. Parameters of laboratory and numerical researches**



Fig. 5 demonstrates the time histories of instantaneous free surface elevations  $\eta(t)$  at the selected locations G1 and G2 derived in the measurements (solid black lines) and in the calculations (dotted red lines). The comparison indicates that the numerical calculations fit the measurements well for the main waveforms in terms of the incident and reflected waves recorded by the gauge G1 and the transmitted wave recorded by the gauge G2. It should also be noted that the experimental and numerical results are in good agreement with respect to the propagation rate of free surface perturbations. Here and below, the dimensionless time  $t = 0$  is defined as the instant when the crest of a solitary wave passes exactly above the top of the obstacle.

**Setup of the numerical experiment and results.**

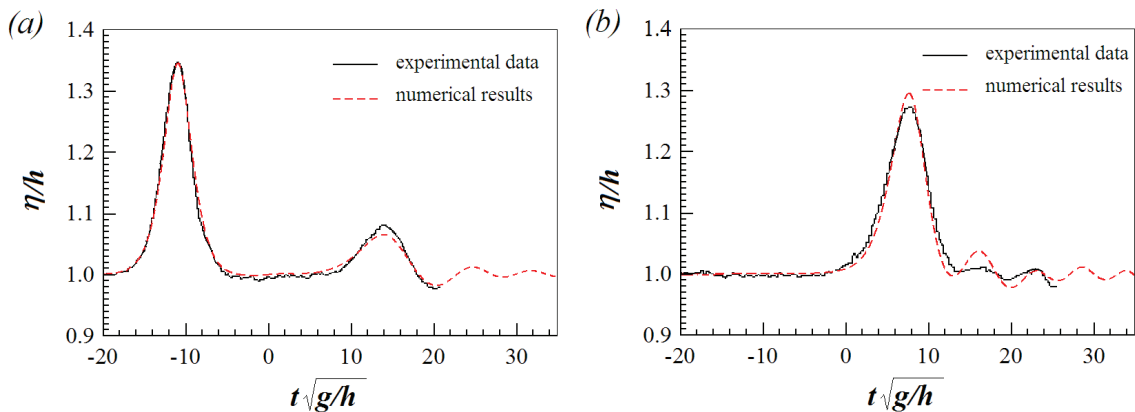
A numerical wave flume used in this study is of 1m depth and 140m length. Normalized parameters of the problem will be further considered. The width of the absorbing layers adjoining the lateral sides of the flume is put to  $2h$ . The rectangular obstacle is situated in the middle of the computational domain. At the initial time instance, the wave crest is located at  $x/h = -20$  and then it propagates from left to right. To derive the initial data for a solitary wave, profile and velocity potential, the MatLab implementation of the iterative method proposed in [27] is utilized. Since it computes the approximated solitary solution of the Euler equations, both horizontal and vertical motions of fluid particles under the wave can be considered. This allows modeling not only the free surface evolution but also the dynamics of the vortex field generated by a solitary wave. The number of vortex panels along the free surface is equal to  $N_z = 2800$ ; a uniform grid system of  $\Delta x = \Delta y = 0.01h$  is put on the flow field; the time step is  $\Delta t = 0.005\sqrt{g/h}$ ;  $Re = 0.69 \cdot 10^6$ .

Fig. 4 demonstrates the free surface elevations  $\eta(x,t)$  arising when the solitary wave of amplitude  $A_i/h = 0.2$  passes over submerged rectangular bar-

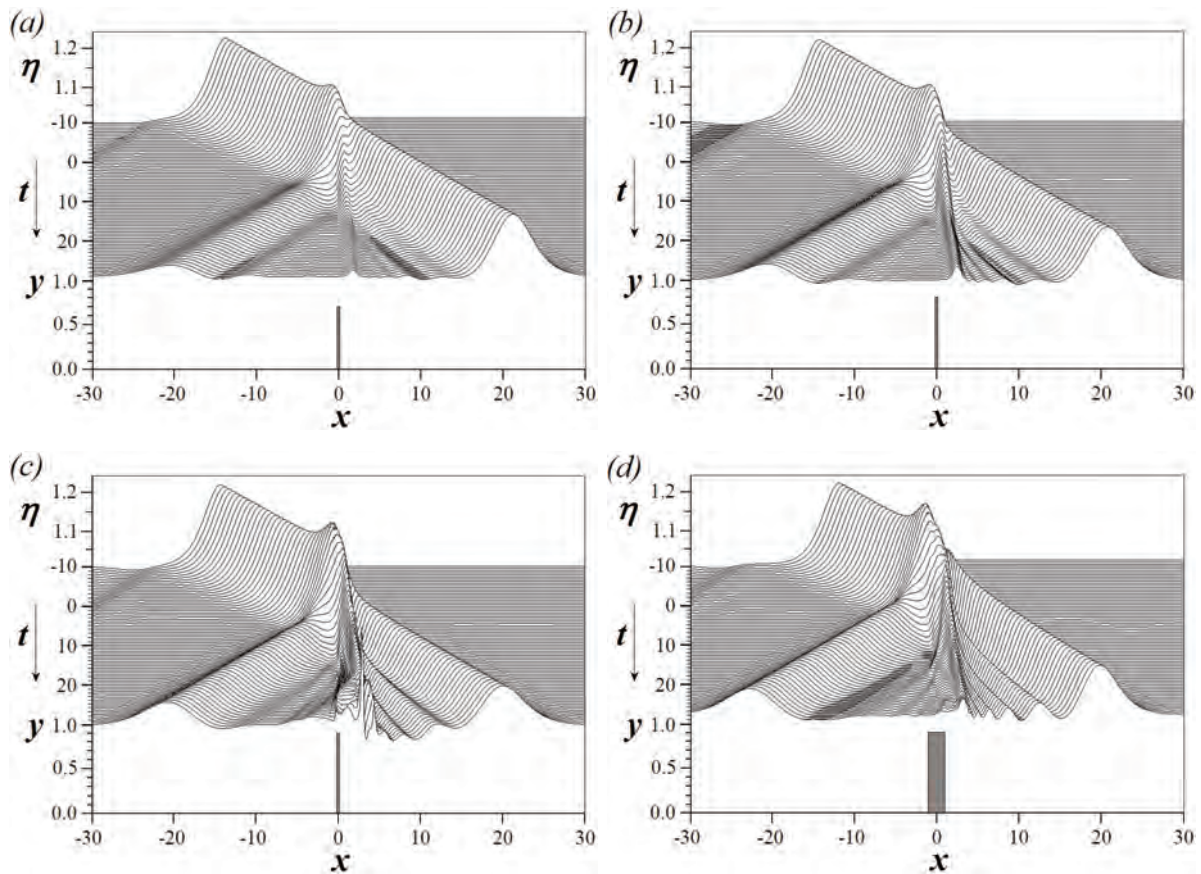
riers of different height  $d/h$  and length  $a/h$ . The results represented in Figs. 4a,b,c are obtained at  $a/h = 0.1$ , so they reflect the wave evolution above a thin vertical barrier. It is reasonable to classify those involving the quantitative parameter  $K_{int} = A_i/(h-d)$ . It was introduced in [26] based on the data of laboratory experiments and was called the interaction coefficient. Fig. 4a illustrates the weak interaction of the solitary wave with the thin barrier of height  $d/h = 0.7$ . It is characterized by the growth of the incident wave over the obstacle and its smooth splitting into the reflected and transmitted solitons moving in opposite directions. Note that the interaction coefficient in this case is  $K_{int} \approx 0.65$ .

Free surface profiles in Fig. 4b are obtained at  $d/h = 0.8$ , which corresponds to the interaction coefficient  $K_{int} \approx 1$ . The transmitted wave has not yet destroyed here, but the dynamics of the process is complicated due to dispersion effects conditioned by the generation of a chain of secondary solitons. Note also that the local rising of the free surface level in Figs.4a, 4b observed immediately behind the obstacle is produced by the intense recirculation flow developed in this area.

Fig. 4c demonstrates the strong influence of a submerged barrier on the wave, which is characterized by the interaction coefficient  $K_{int} \approx 2$  ( $d/h = 0.9$ ). In this case, the incident wave is divided into three parts. The reflected and transmitted solitons moving in opposite directions are formed, as usual. In addition, a part of the water lying directly above the barrier first rises, and then falls sharply and collapses, as a result, chaotic pulsations of the free surface arise in this area. This process is characterized by large gradients of the free surface and the formation of water splashes. Finally, two regular secondary solitons separate from this region, which follow the transmitted wave. It is obvious the more complex the interaction of the wave with the obstacle the more wave energy is expended on secondary processes, which primarily



**Fig. 3. Free surface elevations for the solitary wave interacting with a submerged barrier derived in experimental measurements and calculations by gauges G1 (left) and G2 (right)**



**Fig. 4. Transformations of a solitary wave of amplitude  $A_i/h = 0.2$  above a submerged rectangular structure:**  
**(a) –  $d/h = 0.7, a/h = 0.1$ , (b) –  $d/h = 0.8, a/h = 0.1$ ,**  
**(c) –  $d/h = 0.9, a/h = 0.1$ , (d) –  $d/h = 0.9, a/h = 1.5$**

affects the characteristics of the transmitted soliton. One can see a significant decrease in the amplitude of the transmitted wave in Fig. 4c in comparison with the previous cases.

The calculation results also show that the wave destruction over long rectangular structures is not as intense as over thin ones, even if they are quite high. This conclusion is confirmed by the free surface profiles depicted in Fig. 4d, which are obtained when the solitary wave passes over the rectangle of height  $d/h = 0.9$  and length  $a/h = 1.5$ . The abrupt change in water depth is seen to increase greatly the free surface nonlinearity. As a result, the incident wave grows above the obstacle and then it divides into a reflected soliton and a transmitted wave. In addition, the intense secondary solitons and dispersive wave chain are generated. At the same time, no destructive processes in the form of chaotic pulsations of the free surface near the structure are observed.

The wave propagation over a submerged obstacle is accompanied not only by effects on the free surface, but also by underwater processes. A travelling solitary wave generates the intense flow of liquid particles under the free surface. When this flow meets

an obstacle, it has to rebuild in accordance with the obstacle configuration. Due to the flow narrowing, a shear layer is formed near the structure, followed by flow separation and the formation of large-scale vortices. Fig. 5 illustrates the velocity fields induced by the solitary wave of amplitude  $A_i/h = 0.2$  around the submerged barriers of length  $a/h = 0.1$  and height  $d/h = 0.7$  (left) and  $d/h = 0.9$  (right).

It is known [28], that the length  $L_s$  of a solitary wave is related to its amplitude by the ratio  $L_s/h \approx 10\sqrt{h/A_i}$ . Then one obtains  $L_s/h \approx 22$  at  $A_i/h = 0.2$ . This means that the formation of the shear layer due to the approaching wave begins when the distance between the wave crest and the barrier is about  $11h$ , which corresponds to the dimensionless time  $\bar{t} = t\sqrt{g/h} \approx -10$ .

Figs. 5a, 5f show the process of converting the shear layer into a clockwise vortex, here  $\bar{t} = -8$ . The vortex originates in the front edge of the barrier and rotates in the direction of wave movement. As the wave crest approaches the obstacle, the vortex continues to grow in size as depicted in Figs. 5b, 5g at  $\bar{t} = -2$ . Figs. 5c, 5h correspond to the instant when the crest of the solitary wave is at the top of the bar-

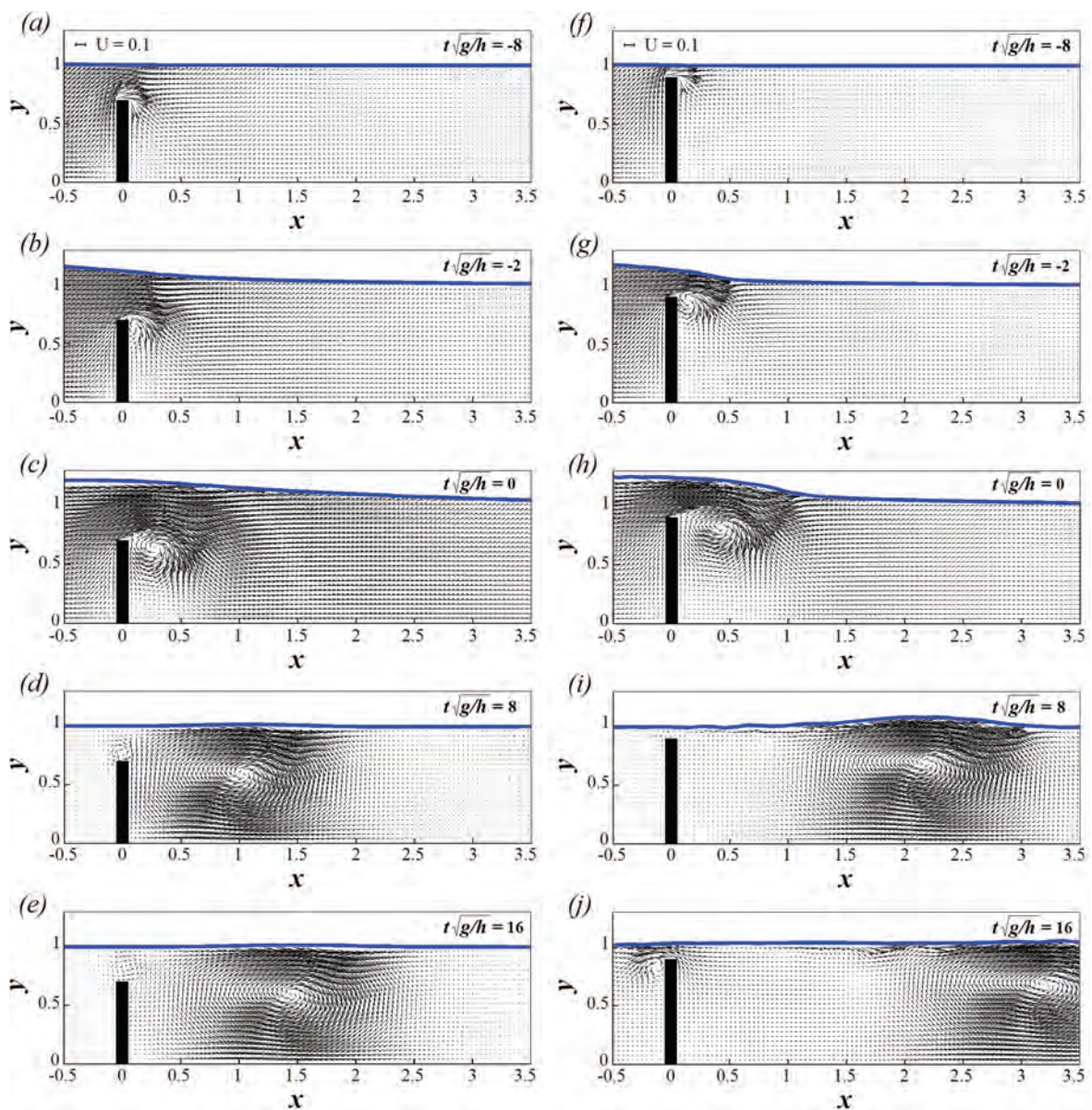


rier ( $\bar{t} = 0$ ). The horizontal flow velocity reaches its maximum value over the obstacle, so the main vortex sheds out and begins to dissipate rapidly.

When the wave has passed the obstacle, the translatory motion of fluid particles almost completely ceases, as a result, the vortex zone remains close to the obstacle and grows to the depth of the water (Figs. 5d, 5i). The zone interacts with the channel bottom and the rear edge of the barrier forcing generation of the boundary layer which thickens and forms the secondary counterclockwise vortex above the obstacle tip. In Figs. 5d, 5i ( $\bar{t} = 8$ ), the counterclockwise vortex is still remains attached to the rear edge of the barrier but further it moves upward and upstream and sheds out (Figs. 5e, 5j). Subsequently,

the primary and secondary vortices reach the free surface and cause it to bulge. It follows from the present results that the evolution of the vortex field forces the water to move upward at the rear edge of the obstacle as well as in the direction opposite to the wave motion.

The influence of the barrier height on the vortex field evolution can be seen by comparing the left and right columns of Fig. 5. With a lower barrier height (left column), the main vortex develops near the structure and remains there until complete dissipation. When the barrier is high (right column), the gap between its top and the free surface is narrowed that leads to increasing the fluid velocity here. So, the primary clockwise vortex is more intense in this case



**Fig. 5. Free surface elevations (blue) and velocity fields generated by a solitary wave of amplitude  $A_1/h=0.2$  around thin vertical barriers of height  $d/h=0.7$  (left) and  $d/h=0.9$  (right) at various time instants**

and localizes closer to the free surface than to the bottom. It moves together with the transmitted soliton quickly leaving the region adjacent to the obstacle. Thus, the effect of a vortex flow on the channel bottom is stronger in the case of low obstacles located on the way of a solitary wave. At the same time, vortices generated behind high obstacles cause intense bulges of the free surface.

**Conclusions.** The numerical model for studying wave-structure interactions is presented. It combines the boundary integral method for description free-surface deformations and the vortex method for integrating the viscous fluid dynamic equations. The validity of this model is confirmed by the close match of the calculated elevations of the free surface for a special case with the corresponding data of experimental researches.

Two types of interaction of a solitary wave with a vertical barrier were revealed based on systematic calculations of the propagation of the solitary wave of normalized amplitude  $A_1/h = 0.2$  over barriers

of different heights. Those are the weak interaction, when the incident wave splits smoothly into the reflected and transmitted solitons, and strong interaction, when the wave breaks down. The scenario for the behavior of a solitary wave over a barrier depends on the interaction coefficient, which is the ratio of the amplitude of the wave to the thickness of the water column above the obstacle. It is obtained that the critical value of the interaction coefficient is about 1, at which the regimes change.

An analysis of the vortex fields created by the solitary wave around barriers of different heights shows that the fluid dynamics in the region is controlled by the interaction of two large opposite vortex structures generated at the barrier tip one after another. The effect of the vortex field on stability of the submerged structure depends on its height. When the barrier is tall, the vortices go up and are carried away by the collinear flow. In the case of a low obstacle, the vortex flow dissipates in its vicinity causing bottom erosion in this region.

#### BIBLIOGRAGHY

1. Miles J.W. (1980) Solitary waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 12, pp. 11–43. URL : <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.12.010180.000303>.
2. Synolakis C. E. (1987) The run-up of solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 185, pp. 523–545. URL : <https://doi.org/10.1017/S002211208700329X>.
3. Зейтунян Р.Х. (1995) Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны. *Успехи физических наук*, т. 165, № 12. С. 1403–1456.
4. Mei C.C., Black J.L. (1969) Scattering of surface waves by rectangular obstacles in waters of finite depth. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 38, no. 3, pp. 499–511. URL : <https://doi.org/10.1017/S0022112069000309>.
5. Seabra-Santos F. J., Renouard D. P., Temperville A. M. (1987) Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 176, pp. 117–134. URL : <https://doi.org/10.1017/S0022112087000594>.
6. Losada M.A., Vidal C., Medina R. (1989) Experimental study of the evolution of a solitary wave at an abrupt junction. *Journal of Geophysical Research*, vol. 94, pp. 557–566. URL : <https://doi.org/10.1029/JC094iC10p14557>.
7. Grilli S.T., Losada M.A., Martin F. (1994) Characteristics of solitary wave breaking induced by breakwaters. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 120, no. 1, pp. 75–92. URL : [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-950X\(1994\)120:1\(74\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-950X(1994)120:1(74)).
8. Cooker M.J., Vidal D.H., Dold J.W. (1990) The interaction between a solitary wave and a submerged semicircular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 215, pp. 1–22. URL : <https://doi.org/10.1017/S002211209000252X>.
9. Cheng Li G., Ji C., Zhai G. (2020) Solitary wave slamming on an oscillating wave surge converter over varying topography in the presence of collinear currents. *Journal of Physics Fluids*, vol. 32, pp. 047102-1–047102-22. URL : <https://doi.org/10.1063/5.0001402>.
10. Lin P., Liu P.L.F. (1998) A numerical study of breaking waves in the surf zone. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 359, pp. 239–264. URL : <https://doi.org/10.1017/S002211209700846X>.
11. Chang K, Hsu T., Liu P. (2001) Vortex generation and evolution in water waves propagating over a submerged rectangular obstacle. *Journal of Coastal Engineering*, vol. 44, pp. 12–36. URL : [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(01\)00019-9](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(01)00019-9).
12. Huang C.-J., Dong C.-M. (2001) On the interaction of a solitary wave and a submerged dike. *Journal of Coastal Engineering*, vol. 43, pp. 265–286. URL : [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(01\)00017-5](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(01)00017-5).
13. Lin P.A. (2004) Numerical study of solitary wave interaction with rectangular obstacles. *Journal of Coastal Engineering*, vol. 51, pp. 35–51. URL : <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2003.11.005>.
14. Baker G.R., Meiron D., Orszag S.A. (1982) Generalized vortex methods for free-surface flow problems. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 123, pp. 477–501. URL : <https://doi.org/10.1017/S0022112082003164>.



15. Lin M.Y., Huang L.H. (2009) Study of water waves with submerged obstacles using a vortex method with Helmholtz decomposition. *Journal Numerical Methods in Fluids*, vol. 60. pp. 119–148. URL : <https://doi.org/10.1002/flid.1873>.
16. Lin M.Y., Huang L.H. (2010) Vortex shedding from a submerged rectangular obstacle attacked by a solitary wave. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 651, pp. 503–518. URL : <https://doi.org/10.1017/S0022112010000145>.
17. Горбань В.О., Горбань І.М. (2005) Вихрова структура потоку при обтіканні квадратної призми: числова модель та алгоритми управління. *Прикладна гідромеханіка*, т. 7, № 2. С. 8–26.
18. Gorban I.M. (2015) A numerical study of solitary wave interactions with a bottom step. *Continuous and Distributed Systems II. Springer, Cham.*, vol. 30, pp. 369–387. URL : [https://doi.org/10.1007/978-3-319-19075-4\\_22](https://doi.org/10.1007/978-3-319-19075-4_22).
19. Gorban I.M., Khomenko O.V. (2016) Flow control near a square prism with the help of frontal flat plates. *Advances in Dynamical Systems and Control. Springer, Cham.*, vol. 69. pp. 327–350. URL : [https://doi.org/10.1007/978-3-319-40673-2\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-319-40673-2_17).
20. Basovsky V.G., Gorban I.M., Khomenko O.V. (2019) Modification of hydrodynamic and acoustic fields generated by a cavity with a fluid suction. *Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems. Springer, Cham.*, pp. 137–158. URL : [https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_9).
21. Lamb H. (1932) *Hydrodynamics*. London: Cambridge University Press.
22. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. (2000) *Vortex methods: theory and practice*. London: Cambridge University Press.
23. Моляков Н.М. (1985) Нестационарное обтекание профиля у поверхности раздела жидкостей. *Труды ВВИА им. Жуковского*, т. 1313. С. 336–347.
24. Israeli M., Orszag S.A. (1981) Approximation of radiation boundary conditions. *Journal of Computer Physics*, vol. 41, pp. 115–135. URL : [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90082-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90082-6).
25. Seabra-Santos F. J., Renouard D. P., Temperville A. M. (1987) Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 176, pp. 117–134. URL : <https://doi.org/10.1017/S0022112087000594>.
26. Котельнікова А.С., Нікішов В.І., Срібнюк С.М. (2018) Експериментальне дослідження взаємодії поверхневої поодинокі хвилі з підводним уступом. *Гідродинаміка і акустика*. т. 1, № 1. С. 22–52. URL : <https://doi.org/10.15407/jha2018.01.042>.
27. Clamond D., Dutykh D. (2013) Fast accurate computation of the fully nonlinear solitary surface gravity waves. *Journal Computers & Fluids*, vol. 84, pp. 35–38. URL : <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.05.010>.
28. Madsen O.S., Mei C.C. (1970) The transformation of a solitary wave over an uneven bottom. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 39, № 4, pp. 781–791. URL : <https://doi.org/10.1017/S0022112069002461>.

#### REFERENCES

1. Miles J.W. (1980) Solitary waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 12, pp. 11–43. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.12.010180.000303>
2. Synolakis C. E. (1987) The run-up of solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 185, pp. 523–545. <https://doi.org/10.1017/S002211208700329X>
3. Zeytunyan R.KH. (1995) Nelineynyye dlinnyye volny na poverkhnosti vody i solitony [Nonlinear long waves on the water surface and solitons]. *Journal Advances in Physical Science*, vol. 165, no. 12, pp. 1403–1456.
4. Mei C.C., Black J.L. (1969) Scattering of surface waves by rectangular obstacles in waters of finite depth. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 38, no. 3, pp. 499–511. <https://doi.org/10.1017/S0022112069000309>
5. Seabra-Santos F. J., Renouard D. P., Temperville A. M. (1987) Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 176, pp. 117–134. <https://doi.org/10.1017/S0022112087000594>
6. Losada M.A., Vidal C., Medina R. (1989) Experimental study of the evolution of a solitary wave at an abrupt junction. *Journal of Geophysical Research*, vol. 94, pp. 557–566. <https://doi.org/10.1029/JC094iC10p14557>
7. Grilli S.T., Losada M.A., Martin F. (1994) Characteristics of solitary wave breaking induced by breakwaters. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 120, no. 1, pp. 75–92. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-950X\(1994\)120:1\(74\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-950X(1994)120:1(74))
8. Cooker M.J., Vidal D.H., Dold J.W. (1990) The interaction between a solitary wave and a submerged semicircular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 215, pp. 1–22. <https://doi.org/10.1017/S002211209000252X>

9. Cheng Li G., Ji C., Zhai G. (2020) Solitary wave slamming on an oscillating wave surge converter over varying topography in the presence of collinear currents. *Journal of Physics Fluids*, vol. 32, pp. 047102-1–047102-22. <https://doi.org/10.1063/5.0001402>
10. Lin P., Liu P.L.F. (1998) A numerical study of breaking waves in the surf zone. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 359, pp. 239–264. <https://doi.org/10.1017/S002211209700846X>
11. Chang K., Hsu T., Liu P. (2001) Vortex generation and evolution in water waves propagating over a submerged rectangular obstacle. *Journal of Coastal Engineering*, vol. 44, pp. 12–36. [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(01\)00019-9](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(01)00019-9)
12. Huang C.-J., Dong C.-M. (2001) On the interaction of a solitary wave and a submerged dike. *Journal of Coastal Engineering*, vol. 43, pp. 265–286. [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(01\)00017-5](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(01)00017-5)
13. Lin P.A. (2004) Numerical study of solitary wave interaction with rectangular obstacles. *Journal of Coastal Engineering*, vol. 51, pp. 35–51. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2003.11.005>
14. Baker G.R., Meiron D., Orszag S.A. (1982) Generalized vortex methods for free-surface flow problems. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 123, pp. 477–501. <https://doi.org/10.1017/S0022112082003164>
15. Lin M.Y., Huang L.H. (2009) Study of water waves with submerged obstacles using a vortex method with Helmholtz decomposition. *Journal Numerical Methods in Fluids*, vol. 60, pp. 119–148. <https://doi.org/10.1002/flid.1873>
16. Lin M.Y., Huang L.H. (2010) Vortex shedding from a submerged rectangular obstacle attacked by a solitary wave. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 651, pp. 503–518. <https://doi.org/10.1017/S0022112010000145>
17. Gorban V.O., Gorban I.M. (2005) Vykrova struktura potoku pry obtikanni kvadratnoyi pryzmy: chyslova model ta alhorytmy upravlinnya [Vortical flow structure near a square prism: numerical model and algorithms of control]. *Journal of Applied Hydromechanics*, vol. 7, no. 2, pp. 8–26.
18. Gorban I.M. (2015) A numerical study of solitary wave interactions with a bottom step. *Continuous and Distributed Systems II. Springer, Cham.*, vol. 30, pp. 369–387. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-19075-4\\_22](https://doi.org/10.1007/978-3-319-19075-4_22)
19. Gorban I.M., Khomenko O.V. (2016) Flow control near a square prism with the help of frontal flat plates. *Advances in Dynamical Systems and Control. Springer, Cham.*, vol. 69, pp. 327–350. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-40673-2\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-319-40673-2_17)
20. Basovsky V.G., Gorban I.M., Khomenko O.V. (2019) Modification of hydrodynamic and acoustic fields generated by a cavity with a fluid suction. *Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems. Springer, Cham.*, pp. 137–158. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_9)
21. Lamb H. (1932) *Hydrodynamics*. London: Cambridge University Press.
22. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. (2000) *Vortex methods: theory and practice*. London: Cambridge University Press.
23. Molyakov N.M. (1985) Nestatsionarnoye obtekanie profilya u poverkhnosti razdela zhidkostey [Unsteady flow around a profile under a free surface separating fluids of different densities]. *Proceedings of the Zhukovsky Air Force Engineering Academy*, vol. 1313, pp. 336–347.
24. Israeli M., Orszag S.A. (1981) Approximation of radiation boundary conditions. *Journal of Computer Physics*, vol. 41, pp. 115–135. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90082-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90082-6)
25. Seabra-Santos F. J., Renouard D. P., Temperville A. M. (1987) Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 176, pp. 117–134. <https://doi.org/10.1017/S0022112087000594>
26. Kotelnikova A.S., Nikishov V.I., Sribnyuk S.M. (2018) Eksperymentalne doslidzhennya vzayemodiyi poverkhnevoyi poodynokoyi khvyli z pidvodnym ustupom [Experimental study of the interaction of a surface solitary wave with a submerged step]. *Hydrodynamics and acoustics*, vol. 1, no. 1, pp. 22–52.
27. Clamond D., Dutykh D. (2013) Fast accurate computation of the fully nonlinear solitary surface gravity waves. *Journal Computers & Fluids*, vol. 84, pp. 35–38. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.05.010>
28. Madsen O.S., Mei C.C. (1970) The transformation of a solitary wave over an uneven bottom. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 39, № 4, pp. 781–791. <https://doi.org/10.1017/S0022112069002461>



УДК 621.391  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-04>

## НАЛАШТУВАННЯ ТА НАВЧАННЯ НЕЧІТКОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ЗАДАЧІ КЛАСИФІКАЦІЇ

**Єгошкін Д. І.**

*аспірант,*

*асистент кафедри комп'ютерних технологій*

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

*пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна*

*orcid.org/0000-0002-0937-4733*

*KnightDanila@i.ua*

**Гук Н. А.**

*доктор фізико-математичних наук, професор,*

*завідувач кафедри комп'ютерних технологій*

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

*пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна*

*orcid.org/0000-0001-7937-1039*

*natalygu29@gmail.com*

**Ключові слова:** *нечітка класифікація, нечітка логіка, база знань, експертна система, квантільні оцінки, мова C/C++, мова JavaScript, JSON.*

У роботі розглянуто задачу класифікації об'єктів за ознаками та розроблено метод нечіткої класифікації. Для розв'язання задачі запропоновано використовувати нечітку модель представлення знань, побудовану з використанням навчальної вибірки, та систему нечіткого логічного виводу. Автоматичне формування системи нечітких логічних правил відбувається в процесі навчання. У процесі навчання відбувається налаштування параметрів моделі – нечітких границь термів. Для усунення проблеми обробки об'єктів, характеристики яких суттєво відрізняються від більшості об'єктів у вибірці та наближаються до порогових, для визначення границь термів пропонується використовувати квантільні оцінки. Модифікація класичного алгоритму нечіткої класифікації полягає в організації двохетапної процедури класифікації. Для поліпшення якості класифікації будуються допоміжні нечіткі класи, з використанням яких здійснюється відображення об'єктів в чіткі класи з навчальної вибірки. Для оцінювання якості класифікації використовуються метрики точності та повноти. Налаштування параметрів алгоритму нечіткої класифікації та розв'язання задачі нечіткої класифікації виконано з використанням набору даних іриси Фішера. Наведено порівняння результатів класифікації з використанням запропонованого в роботі двохетапного походу і класичного алгоритму нечіткої класифікації. Для зменшення впливу наявних у навчальній вибірці аномальних об'єктів на результат класифікації для визначення границь термів використовується міжквартільне середнє, що робить процедуру визначення границь термів робастною. Показано, що використання міжквартільного середнього для визначення границь термів дозволяє отримати прийнятну точність класифікації для вибірок, які містять об'єкти з аномальними характеристиками. Досліджено вплив способу розбиття вибірки на навчальну і тестову, а також вплив розміру навчальної вибірки на якість класифікації. Запропонований підхід є придатним для обробки даних в умовах обмеженої вибірки, часткового чи повного перекриття класів об'єктів, наявності об'єктів з нетиповими значеннями характеристик.

## SETTING UP AND TRAINING A FUZZY MODEL FOR A CLASSIFICATION PROBLEM

**Yehoshkin D. I.**

*Postgraduate Student,  
Assistant at the Department of Computer Technology  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarin avenue, 72, Dnipro, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-0937-4733  
KnightDanila@i.ua*

**Huk N. A.**

*Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor,  
Head of the Department of Computer Technology  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarin avenue, 72, Dnipro, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-7937-1039  
natalyguk29@gmail.com*

**Key words:** *fuzzy classification, fuzzy logic, knowledge base, expert system, quantile estimates, C/C++ language, JavaScript language, JSON.*

The paper considers the problem of classifying objects by attributes and developed a method of fuzzy classification. To solve the problem, it is proposed to use a fuzzy model of knowledge representation, built using a training sample and a fuzzy logical inference system. The automatic formation of a system of fuzzy logical rules occurs in the learning process. In the process of training, the parameters of the model are adjusted – the fuzzy boundaries of the terms. To eliminate the problem of processing objects, the characteristics of which differ significantly from the majority of objects in the sample and approach the threshold, it is proposed to use quartile estimates to determine the boundaries of terms.

A modification of the classical fuzzy classification algorithm consists of organizing a two-stage classification procedure. To improve the quality of classification, auxiliary fuzzy classes are constructed, with the use of which objects are mapped into crisp classes of the training set. To estimate the quality of the classification, metrics of accuracy and completeness are used. The settings of the fuzzy classification algorithm and the solution of the fuzzy classification problem are performed using the Fisher Iris dataset. The comparison of classification results using the proposed two-stage approach and the classical fuzzy classification algorithm is presented. To reduce the influence of anomalous objects present in the training set on the classification result, the midhinge is used to determine the boundaries of terms, which makes the procedure for determining the boundaries of terms robust. It is shown that the use of the midhinge for determining the boundaries of terms obtains acceptable classification accuracy for samples containing objects with anomalous characteristics.

The influence of the method of dividing the sample into training-testing and the influence of the size of the training sample on the quality of classification is investigated.

The proposed approach is suitable for data processing in conditions of a limited set, in a partial or complete overlap of object classes, the presence of objects with atypical values of characteristics.

**Вступ.** Однією із задач аналізу даних є задача класифікації. Її розв'язок дозволяє розбити множину об'єктів на заздалегідь створені групи (класи) на основі аналізу їх формального опису, що дозволяє прискорити процес подальшої обробки даних. При класифікації кожен об'єкт спостереження відноситься до певної групи або номінальної категорії на основі деякої якісної властивості або сукупності властивостей.

Задачам класифікації присвячено багато робіт. До числа поширених методів розв'язання задачі класифікації відносяться: нейронні мережі; логістична і пробіт-регресія; дерева рішень; метод найближчого сусіда; машини опорних векторів; дискримінантний аналіз.

Традиційні підходи, засновані на апараті математичної статистики або імітаційному моделюванні, не дозволяють будувати адекватні моделі в умовах обмеженості часових, обчислювальних і матеріальних ресурсів. Тому при розв'язанні багатьох практичних задач, пов'язаних з класифікацією об'єктів, широко застосовуються моделі і методи штучного інтелекту з використанням технологій інтелектуального аналізу даних.

Так, у роботі [1] для розв'язання задачі класифікації застосовується апарат нечіткої логіки. Для класифікації об'єктів з дискретним виходом застосовується нечіткий логічний вивід типу Сугено та розширюються функціональні можливості пакету Fuzzy Logic Toolbox системи MATLAB. Взаємозв'язок між чотирма вхідними і однією вихідної змінної описується трьома нечіткими правилами, які з точністю 85% здатні класифікувати вибірку «Іриси Фішера».

У роботі [2] досліджується застосування нечітких моделей в задачах класифікації на основі представлення даних у вигляді нечітких градацій. Введено класи об'єктів, еталонні зразки в кожному класі, а кожен клас характеризується розподіленою областю значень нечітких критеріїв. Початкові дані для класифікації є суперечливими, а об'єкти, еталони і класи перетинаються, тому побудова розв'язку задачі в класичній постановці викликає значні труднощі. Класифікація розглядається як різновид задачі прийняття рішень, в якій за допомогою узагальнення нечітких фактів, що характеризують властивості, стан або зміну станів об'єктів, здійснюється вибір найкращого класу для кожного об'єкту. Проведено порівняння різних мір узгодженості об'єктів з класами, досліджено їх вплив на результати класифікації.

У роботі [3] розвивається метод гірської кластеризації Ягера-Фільова на випадок нечітких представлень простору станів і ознак, який заснований на обчисленні щільності розподілу інтегральних характеристик об'єктів в нечіткому просторі станів. Із використанням нечіткої відстані Хеммінга

визначено приналежність об'єкту при перетині областей нечіткого розподілу ознак.

У роботі [4] розглядається актуальна на даний момент проблема генерації набору нечітких правил для системи нечіткого виводу Мамдані на основі числових даних, отриманих у процесі навчання системи керування. Запропонований підхід базується на алгоритмах чіткої і нечіткої кластеризації – алгоритмі гірської кластеризації і алгоритмі Густафсона-Кесселя.

У побудові систем класифікації на основі нечіткої логіки важливим є правильна побудова системи правил та налаштування параметрів моделі. Зазвичай для виконання таких робіт залучають групи експертів. Однак використання результатів спостережень та автоматична побудова системи логічного виведення на їх основі дозволить мінімізувати людський фактор, скоротити час та витрати на налаштування моделі.

У даній роботі розвивається підхід щодо автоматизації побудови системи класифікації з використанням навчальної вибірки та моделі нечіткої логіки. Метод пропонує автоматичне формування системи правил на основі аналізу об'єктів навчальної вибірки, налаштування параметрів моделі в процесі навчання, врахування наявності аномальних об'єктів у навчальної вибірки.

Для покращення якості класифікації використовуються допоміжні нечіткі класи приналежності, за допомогою яких здійснюється подальше відображення об'єктів в чіткі класи з навчальної вибірки.

**Постановка задачі.** Розглядається множина об'єктів деякої предметної області. Об'єкти множини  $X$  характеризуються деякими ознаками  $K$ . Існує скінченна множина класів  $Z$ , серед яких необхідно розподілити об'єкти.

Для побудови системи класифікації використовуються результати спостережень за об'єктами, ознаки вимірюються та подаються числовими значеннями, для кожного з об'єктів визначено відповідний клас, до якого він належить. Такий набір даних формує навчаючу вибірку виду:

$$X^n = \{(x_i, z_j)\}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, J}$$

де  $(x_i, z_j)$  – пара об'єкт-клас;  $x_i \in X^n$  – об'єкт;  $z_j$  – клас, до якого належить об'єкт  $x_i$ ,  $z_j \in Z$ . Кожен об'єкт  $x_i$  характеризується вектором ознак  $\overline{K} = (k_1, k_2, \dots, k_l), k_l \in \mathbb{R}$ .

Навчаюча вибірка для скінченного числа об'єктів описує відображення  $F^*: X \rightarrow Z$ , за допомогою якого можна визначити приналежність певного об'єкту до певного класу об'єктів.

Необхідно побудувати відображення  $F: X \rightarrow Z$ , за допомогою якого можливо класифікувати довільний об'єкт з множини  $X$ .

У класичній постановці задача класифікації передбачає, що в результаті розбиття будуть отри-

мані детерміновані класи об'єктів, і кожен об'єкт належить тільки одному класу. Однак на практиці такий похід у деяких випадках призводить до аналітичної невизначеності, тому в роботі розвивається підхід, заснований на представленні об'єктів і класів об'єктів у вигляді нечітких даних, який передбачає розробку системи нечіткого логічного виводу для розв'язання задачі класифікації та налаштування параметрів моделі в процесі виконання процедури класифікації.

**Математична модель задачі.** Для опису об'єктів предметної області будемо використовувати нечітку модель представлення знань, а для виконання процедури класифікації – систему нечіткого логічного виводу.

Будемо вважати, що кожна ознака об'єкта описується лінгвістичною змінною. Для кожної ознаки формується терм-множина, елементами якої є нечіткі змінні, задаються границі термів.

Для відображення чітких вхідних значень ознак  $k_i$  – в нечіткі множини вводяться функції приналежності  $M_{it}$  виду:

$$M_{it}(k_i, a_{it}, b_{it}, c_{it}, d_{it}) = \begin{cases} 0, & k_i \leq a_{it} \\ \frac{k_i - a_{it}}{b_{it} - a_{it}}, & a_{it} \leq k_i \leq b_{it} \\ 1, & b_{it} \leq k_i \leq c_{it} \\ \frac{d_{it} - k_i}{d_{it} - c_{it}}, & c_{it} \leq k_i \leq d_{it} \\ 0, & d_{it} \leq k_i \end{cases} \quad (1)$$

де  $M_{it}$  – функції приналежності ознаки  $k_i$  терму  $t$ ;  $a_{it}, b_{it}, c_{it}, d_{it}$  – числові параметри, які визначають границі термів та впорядковані відношенням  $a_{it} \leq b_{it} \leq c_{it} \leq d_{it}$ .

Для підвищення якості класифікації нечітка модель представлення знань потребує налаштування. Для визначення границь термів будемо використовувати дані навчальної вибірки. Аналіз великих обсягів спостережень демонструє, що в результатах можуть бути присутніми нетипові спостереження, значення яких не можуть бути описані загальними закономірностями. Наявність таких даних може бути пов'язано з похибкою у вимірюваннях, аномаліями в розподілі даних або факторами, які не були враховані при побудові моделі. Значення, що суттєво відхиляються, можуть істотно погіршити налаштування процедури класифікації, оскільки класифікатор буде намагатися пояснити нетипові спостереження.

У роботі для обчислення границь термів пропонується використовувати кватильні оцінки, а саме міжкватильне середнє (МН – Midhinge), значення якого обчислюється за навчальною вибіркою. Застосування такого підходу робить процедуру визначення границь термів робастною.

Для визначення межкватильного середнього набір даних з навчальної вибірки впорядковується та ділиться на чотири частини, потім обчислюється середнє значення між першим і третім кватильми [5]:

$$MH = \frac{Q1 + Q3}{2}, \quad (2)$$

$$Q1 = x_{\min Q1} + \Delta x_{Q1} \frac{\frac{N}{4} - S_{Q1-1}}{n_{Q1}},$$

$$Q3 = x_{\min Q3} + \Delta x_{Q3} \frac{\frac{3N}{4} - S_{Q3-1}}{n_{Q3}},$$

де  $Q1, Q3$  – медіани  $h$  найменших і  $h$  найбільших значень відповідно;  $x_{\min Q1}, x_{\min Q3}$  – нижні границі інтервалів, що містять перший і третій кватиль;  $\Delta x_{Q1}, \Delta x_{Q3}$  – ширина інтервалів;  $S_{Q1-1}, S_{Q3-1}$  – накопичена частота інтервалу, що передує даному – може бути визначена, як сума всіх попередніх частот до поточної;  $n_{Q1}, n_{Q3}$  – частота попадання значень навчальної вибірки в інтервали, що містять перший і третій кватиль відповідно.

Границі термів визначаються відносно елементів навчальної вибірки у такий спосіб (рівняння 3), де МН – міжкватильне середнє;  $t = \overline{1, T}$ ,  $T \geq 2$ ,  $T$  – кількість елементів терм-множини лінгвістичної змінної.

У роботі пропонується модифікація класичного алгоритму нечіткої класифікації, яка полягає в організації двохетапної процедури класифікації. Із застосуванням введеної модифікації спочатку виконується проміжна класифікація об'єктів всередині системи, в результаті чого будуються класи нечітких об'єктів [6]. На другому етапі, виходячи з нечітких класів  $Y$ , відбувається класифікація стосовно чітких класів  $Z$  за допомогою навчальної вибірки та введених метрик. Такий підхід дозволяє уникнути помилкових результатів класифікації у випадку, коли класи розташовані поблизу один від одного, а можливо, і перетинаються.

Для організації першого етапу класифікації вводяться проміжні нечіткі класи  $Y$  нечітких об'єктів. Під нечіткими класами розуміються класи з властивостями, які є загальними для нечітких об'єктів, що належать різним класам. Тобто об'єкт  $x_i \in X$  може одразу належати до декількох класів з певною мірою істинності. Відображення об'єкта  $x_i \in X$  в клас  $Y$  можна представити функціональною залежністю від вектору ознак  $(k_1, k_2, \dots, k_l)$ :

$$Y = f(k_1, k_2, \dots, k_l), \quad (4)$$

де  $f$  – дійсна функція чітких значень  $(k_1, k_2, \dots, k_l)$ .

$$\bar{k}_t = \begin{cases} \left( \min_{i=1} (k_i), \max_{i=1} (k_i) \right), t=1, T=2 \\ \left( \min_{i=1} (k_i), \max_{i=1} (k_i) \right), t=T, T=2 \\ \left( \min_{i=1} (k_i), \min_{i=1} (k_i) + 2 \cdot \frac{2 \cdot \left| \text{MH}_{i=1}(k_i) - \min_{i=1}(k_i) \right|}{T+1} \right), t=1, T > 2 \\ \left( \min_{i=1} (k_i) + \frac{(t-1) \cdot 2 \cdot \left| \text{MH}_{i=1}(k_i) - \min_{i=1}(k_i) \right|}{T+1}, \max_{i=1} (k_i) - \frac{(T-t) \cdot 2 \cdot \left| \text{MH}_{i=1}(k_i) - \max_{i=1}(k_i) \right|}{T+1} \right), 1 < t < T, T > 2 \\ \left( \max_{i=1} (k_i) - 2 \cdot \frac{2 \cdot \left| \text{MH}_{i=1}(k_i) - \max_{i=1}(k_i) \right|}{T+1}, \max_{i=1} (k_i) \right), t=T, T > 2 \end{cases}, \quad (3)$$

### Рівняння 3

У роботі залежність (4) зображується системою нечітких логічних правил. Для забезпечення повноти системи правил потрібна наявність хоча б одного правила для кожного терму вихідної змінної, а при формуванні їх умовних частин складаються всі можливі комбінації термів вхідних змінних.

Система правил будується у вигляді:

$$\begin{aligned} & \text{П}_1: \text{Якщо } k_1 \in A_{11} \wedge k_2 \in A_{21} \wedge k_3 \in A_{31} \wedge \dots \wedge k_t \in A_{t1} \text{ ТО } Y = Y_1, \\ & \text{П}_2: \text{Якщо } k_1 \in A_{12} \wedge k_2 \in A_{22} \wedge k_3 \in A_{32} \wedge \dots \wedge k_t \in A_{t2} \text{ ТО } Y = Y_m, \\ & \text{П}_3: \text{Якщо } k_1 \in A_{11} \wedge k_2 \in A_{22} \wedge k_3 \in A_{31} \wedge \dots \wedge k_t \in A_{t1} \text{ ТО } Y = Y_m, \\ & \text{П}_4: \text{Якщо } k_1 \in A_{11} \wedge k_2 \in A_{21} \wedge k_3 \in A_{32} \wedge \dots \wedge k_t \in A_{t1} \text{ ТО } Y = Y_m, \\ & \dots \\ & \text{П}_{n+1}: \text{Якщо } k_1 \in A_{11} \wedge k_2 \in A_{21} \wedge k_3 \in A_{31} \wedge \dots \wedge k_t \in A_{t2} \text{ ТО } Y = Y_m, \\ & \text{П}_{n+2}: \text{Якщо } k_1 \in A_{12} \wedge k_2 \in A_{22} \wedge k_3 \in A_{31} \wedge \dots \wedge k_t \in A_{t1} \text{ ТО } Y = Y_{m+1}, \\ & \text{П}_{n+3}: \text{Якщо } k_1 \in A_{12} \wedge k_2 \in A_{21} \wedge k_3 \in A_{32} \wedge \dots \wedge k_t \in A_{t1} \text{ ТО } Y = Y_{m+1}, \\ & \dots \\ & \text{П}_{2n+1}: \text{Якщо } k_1 \in A_{12} \wedge k_2 \in A_{21} \wedge k_3 \in A_{31} \wedge \dots \wedge k_t \in A_{t2} \text{ ТО } Y = Y_{m+1}, \\ & \dots \\ & \text{Пр}: \text{Якщо } k_1 \in A_{1T} \wedge k_2 \in A_{2T} \wedge k_3 \in A_{3T} \wedge \dots \wedge k_t \in A_{tT} \text{ ТО } Y = Y_M, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $p = \overline{1, P}$  – номер правила в базі правил;  $P$  – загальна кількість правил;  $A_{it}$  – нечіткий терм, що характеризує ознаку  $k_i$  для правила  $p$ ;  $t = \overline{1, T}$ ,  $T$  – кількість термів для ознаки  $k_i$ ;  $Y_m$  – мітка проміжного класу, до якого належить об'єкт  $x_i \in X$ ;  $m = \overline{1, M}$ ,  $M$  – кількість класів  $Y$ .

Загальна кількість логічних правил визначається кількістю всіх можливих комбінацій лінгвістичних значень  $A_{it}$  і відповідає умові:

$$P \leq \prod_{i=1}^L T_i$$

де  $L$  – розмірність вектора ознак  $\overline{K} : (k_1, k_2, \dots, k_l)$ ;  $T_i$  – кількість термів для ознаки  $k_i$ .

**Метод розв'язання.** Класифікація здійснюється на основі алгоритму нечіткого логічного виводу. На відміну від класичного підходу, формування системи правил виконується автоматично на етапі навчання. З використанням навчальної вибірки об'єкти якої мають однакову вимірність в просторі ознак, формулюється система правил (5).

Для виконання ідентифікації об'єкта застосовано алгоритм нечіткого логічного виводу [7], модифікований введенням додаткового механізму порівняння чіткого вихідного значення  $Y^*$  та ступеню приналежності  $M^*$ , отриманого для об'єкта  $X^* = (k_1, k_2, \dots, k_l)$ , і вихідних значень  $Y_i^*$  та  $M_i^*$  для об'єктів  $X^n = \{(x_i, z_j)\}$ , наявних в базі знань.

Для виконання процедури фазифікації вхідних змінних  $k_i$  в нечіткі множини  $A_{it}$  будемо використовувати операцію [8]:

$$A_{it} = \int_{\underline{k}_i}^{\overline{k}_i} (M_{it}(k_i) / k_i) dk \quad (6)$$

де  $\underline{k}_i, \overline{k}_i$  – границі термів.

Ступінь приналежності вхідного об'єкта  $X^* = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  нечітким класам  $Y_m$  з бази знань (5) описується системою нечітких логічних рівнянь:



$$M_{Y_m}(X) = \bigvee_{p=1, P, l=1, L} \bigwedge [M_{l_t}(k_t)], \quad t = \overline{1, T} \quad (7)$$

де оператори  $\vee$  та  $\wedge$  відповідають виконанню логічних операцій «АБО» та «І» відповідно. У роботі використані їх реалізації у вигляді знаходження  $\max$  та  $\min$ .

Нечітка множина  $\tilde{Y}$  проміжних класів, що відповідає вхідному об'єкту  $X$  визначається у вигляді:

$$\tilde{Y} = \text{agg} \left( \int_{\tilde{Y}} \text{imp}(M_{Y_m}(X), M_{Y_m}(Y)/Y) dY \right) \quad (8)$$

де  $\text{imp}$  – операція імплікації,  $\text{agg}$  – операція агрегування, які реалізовані операцією знаходження  $\min$  та  $\max$  відповідно.

Чітке значення виходу  $Y^*$  визначається в результаті дефазифікації нечіткої множини  $\tilde{Y}$  за методом центру тяжіння:

$$Y^* = \int_{\tilde{Y}} Y \cdot M_{\tilde{Y}}(Y) dY / \int_{\tilde{Y}} M_{\tilde{Y}}(Y) dY \quad (9)$$

Ступінь приналежності  $M^*$  вхідного об'єкта  $X^* = (k_1, k_2, \dots, k_l)$  визначається в результаті дефазифікації нечіткої множини  $\tilde{Y}$  за методом центру тяжіння:

$$M^* = \int_{\tilde{Y}} C \cdot M_{\tilde{Y}}(Y) dY / \int_{\tilde{Y}} M_{\tilde{Y}}(Y) dY \quad (10)$$

де  $C$  – константа, значення якої обирається експериментально в залежності від типу функції приналежності та елементів навчальної вибірки.

Для організації процедури порівняння визначимо відстань між об'єктом  $X^*$  та об'єктами навчальної вибірки  $X^n = \{(x_i, z_j)\}$ . Відстань визначається на основі обраної метрики в просторі характеристик. Для оцінки міри близькості елементів використовується Евклідова відстань:

$$d((Y^*, M^*), (Y_i^*, M_i^*)) = \sqrt{(Y^* - Y_i^*)^2 + (M^* - M_i^*)^2} \quad (11)$$

$$d((Y^*, M^*), (Y_i^*, M_i^*)) < \varepsilon \quad (12)$$

Після виконання процедури дефазифікації обчислюється  $d((Y^*, M^*), (Y_i^*, M_i^*))$  та перевіряється умова (12).

Далі будемо множину  $\tilde{Y}$ , до якої відносяться об'єкти навчальної вибірки  $X^n = \{(x_i, z_j)\}$  схожі з об'єктом  $X^*$ , якщо  $d((Y^*, M^*), (Y_i^*, M_i^*)) < \varepsilon$ , то  $(x_i, z_j) \in \tilde{Y}$ .

Клас, до якого належить вхідний об'єкт  $X^*$ , визначається у такий спосіб:

$$\max_{j=1}^M \left( \text{card}_{z_j}^d(Y) \right), \quad (13)$$

де  $\text{card}_{z_j}^d(Y)$  – потужність множини  $\tilde{Y}$ .

Вказану послідовність дій можна описати наступним алгоритмом.

Алгоритм:

Крок 0. Ініціалізація. Задати навчальну вибірку  $X^n = \{(x_i, z_j)\}$ ; значення  $\varepsilon$  – похибка системи; кількість нечітких класів  $Y$ .

Крок 1. За допомогою навчальної вибірки  $X^n = \{(x_i, z_j)\}$ , побудувати функції приналежності (1) та розрахувати границі термів лінгвістичних змінних  $A_{l_t}$  за формулою (3).

Крок 2. Побудувати систему правил у вигляді (5).

Крок 3. За допомогою механізму нечіткого логічного виведення (6) – (10) розрахувати ступені приналежності об'єктів навчальної вибірки  $X^n$  нечітким множинам  $\tilde{Y}$ , визначити чітке значення  $Y^*$  та  $M^*$ , зберегти ці значення разом з навчальною вибіркою  $X^n = \{(x_i, z_j, \tilde{Y}_i, Y_i^*, M_i^*)\}$ .

Крок 4. Для вхідного об'єкту  $X^*$  на базі сформованих продукційних правил за допомогою (6) – (8) розрахувати ступені приналежності об'єкта нечітким множинам  $\tilde{Y}$ . За формулами (9)-(10) отримати чітке значення  $Y^*$  та  $M^*$ .

Крок 5. З множини об'єктів  $X^n = \{(x_i, z_j, \tilde{Y}_i, Y_i^*, M_i^*)\}$  обрати лише ті, для яких  $\tilde{Y}_i = \tilde{Y}^*$ .

Крок 6. Обчислити відстані між об'єктом  $X^*$  та обраними об'єктами з навчальної вибірки  $X^n = \{(x_i, z_j, \tilde{Y}_i, Y_i^*, M_i^*)\}$  за формулою (11), перевірити виконання умови (12).

Якщо нерівність (12) є вірною, побудувати множину  $Y$  та перейти до кроку 8, інакше перейти до кроку 7.

Крок 7. Об'єкт неможливо класифікувати.

Крок 8. Для побудованої множини  $Y$ , знайти потужність для кожного з класів  $z_j$  з  $X^n = \{(x_i, z_j, \tilde{Y}_i, Y_i^*, M_i^*)\}$ .

Крок 9. Отримати результат ідентифікації з умови (13).

Розроблений алгоритм, було реалізовано у вигляді програмного забезпечення з використанням мов C/C++ та JavaScript, а також текстового формату обміну даними JSON. Для розробки використовувалися платформи NetBeans IDE, WhiteStarUML, GitHub, WebGL, Chrome, Mozilla Firefox, Opera.

**Аналіз результатів класифікації.** Запропонований підхід до класифікації об'єктів за допомогою нечіткої логіки та елементів навчальної вибірки був протестований для даних з відомої задачі класифікації Iris Data Set – Іриси Фішера [9]. Задача класифікації передбачає визначення належності ірису до одного з 3 типів рослин: Setosa, Versicolor, Virginica.

Навчальна вибірка  $X^n = \{(x_i, z_j)\}$  складається зі 150 об'єктів  $x_i$ , кожен з яких належить одному з трьох класів  $z_j$ . Кожен клас містить по 50 елементів вибірки. В ролі ознак об'єкта використовуються: довжина чашолистка –  $\text{sepalLength}$ , ширина чашолистка –  $\text{sepalWidth}$ , довжина пелюстки –  $\text{petalLength}$ , ширина пелюстки –  $\text{petalWidth}$ . Вихідна змінна  $Y$  характеризує проміжні класи об'єктів: клас I, клас II, клас III, кількість проміжних нечітких класів  $Y$  співпадає з кількістю вихідних класів класифікації, які зазначено у вибірці.

Для лінгвістичних змінних, які описують кожну з ознак, вводяться терми low, mid, high. Для кожної вхідної та вихідної змінної вводяться функції приналежності виду (1), обчислюються границі термів за формулами (3).

Далі формується система правил (5), передумови яких складені з усіх можливих комбінацій значень нечітких вхідних змінних (всього 81 правило).

Для апробації запропонованого підходу до класифікації об'єктів навчальна вибірка  $X^n = \{(x_i, z_j)\}$  була поділена на дві частини: навчальну  $Q - 120$  ірисів і тестову  $V - 30$  ірисів.

Розглянемо етапи виконання процедури класифікації об'єкту  $X = (6.3, 2.7, 4.9, 1.8)$ ,  $X \in V$ . На першому етапі класифікації з використанням сформованих продукційних правил та шляхом виконання процедур (6) – (8) було розраховано ступені приналежності об'єкта нечітким множинам  $\tilde{Y}^*$ . За формулами (9) – (10) отримано дефазифіковані значення  $Y^* = 60.35$ ,  $M^* = 0.46$ . Визначено, що за значенням  $Y^* = 60.35$ , об'єкт  $X$  належить до проміжних класів II та III. Далі за допомогою (11), (12) побудовано множину  $Y^d$  і визначено клас, до якого належить об'єкт, за допомогою (13):

$$\max \left( \underset{\text{setosa}}{\text{card}}^d(Y), \underset{\text{versicolor}}{\text{card}}^d(Y), \underset{\text{virginica}}{\text{card}}^d(Y) \right) = \\ = \max(0, 3, 7) = 7 \Rightarrow \underset{\text{virginica}}{\text{card}}^d(Y)$$

За результатами виконаних розрахунків отримано, що об'єкт належить класу Virginica, що відповідає навчальній вибірці [9].

Порівняння результатів класифікації з використанням запропонованого в роботі двохетапного підходу і класичного алгоритму нечіткої класифікації [1] наведено на рис. 1.

У класичному алгоритмі використовувалась модель нечіткого логічного виводу типу Сугено з чотирма вхідними і однією вихідною змінною, функції приналежності побудовано за середнім

значеннями. При використанні класичного підходу об'єкт  $X$  було віднесено до класу Versicolor, результат фазифікації вихідної змінної, отриманий методом центру тяжіння, наведено на рис. 1 а.

Результат класифікації за допомогою запропонованого підходу наведено на рис. 1. б). Можна бачити, що навколо об'єкту  $X$  (на рис. 1б позначений трикутником) є 3 об'єкти класу Versicolor (на рис. 1б позначені квадратами) та 7 об'єктів класу Virginica (на рис. 1б позначені кругами), що за (13) свідчить про належність об'єкту  $X$  до проміжного класу III з більшою ймовірністю, ніж до класу II. Проведений аналіз дозволяє визначити належність об'єкту  $X$  до класу Virginica, що співпадає з результатом класифікації за вибіркою [9].

У таблиці 1 подано деякі результати класифікації елементів тестової вибірки  $V$ .

Для оцінки якості класифікації вводяться метрики:

accuracy – частина правильних відповідей моделі:

$$\text{accuracy} = \frac{\text{TP} + \text{TN}}{\text{TP} + \text{TN} + \text{FP} + \text{FN}} ;$$

precision – точність:

$$\text{precision} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FP}} ;$$

recall – повнота:

$$\text{recall} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN}} ;$$

f1-score – f-mіра:

$$\text{f1-score} = \frac{2 \times (\text{precision} \times \text{recall})}{\text{precision} + \text{recall}} ,$$

де TP- True Positive; FP – False Positive; FN – False Negative; TN – True Negative.

Із використанням введених метрик для результату класифікації, наведеного в таблиці 1, отримані наступні значення: accuracy=0,87; precision=0,87; recall = 0,83; f1-score=0,84.

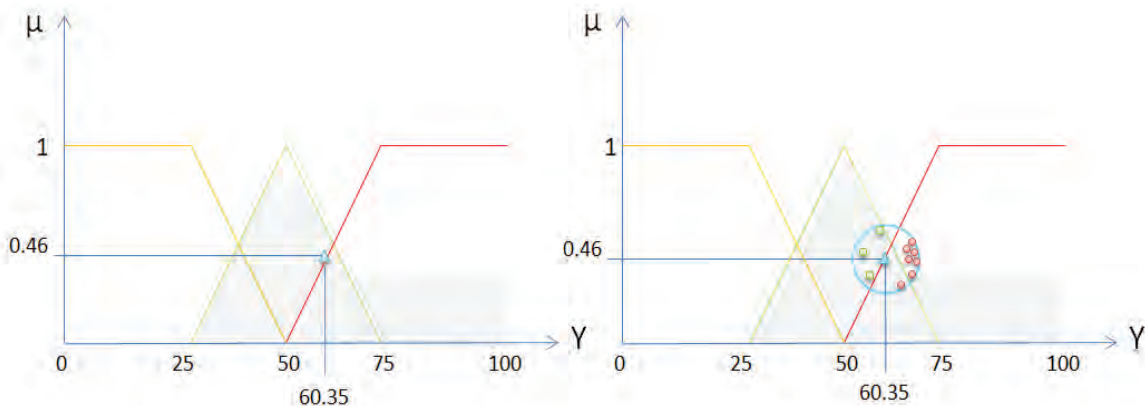


Рис. 1: а) Класичний алгоритм нечіткої класифікації; б) Розроблений метод класифікації

На рис. 2 наведено розподіл об'єктів навчальної вибірки в двовимірному просторі на три проміжні класи, можна зазначити, що проміжні класи об'єктів навчальної вибірки добре розрізняються.

Розглянемо вплив запропонованого способу робастного визначення границь термів у випадку появи в навчальній вибірці  $X^n = \{(x_i, z_j)\}$  об'єктів з аномальними значеннями, ознаки об'єктів, доданих до вибірки, наведені в табл. 2, аномальні значення виділені сірим кольором.

У таблиці 3 представлені результати визначення границь термів, які обчислені з використанням МН (3) і з застосування АМ (Arithmetic mean) – середнього арифметичного значення для вибірок, які не містять і містять аномальні об'єкти.

Можна відзначити, що при додаванні в навчальну вибірку аномальних об'єктів, різниця між границями термів обчислених за допомогою МН і АМ змінюється в діапазоні від 0.015 до 3.67. Найбільші відмінності спостерігаються при визначенні границь термів лінгвістичної

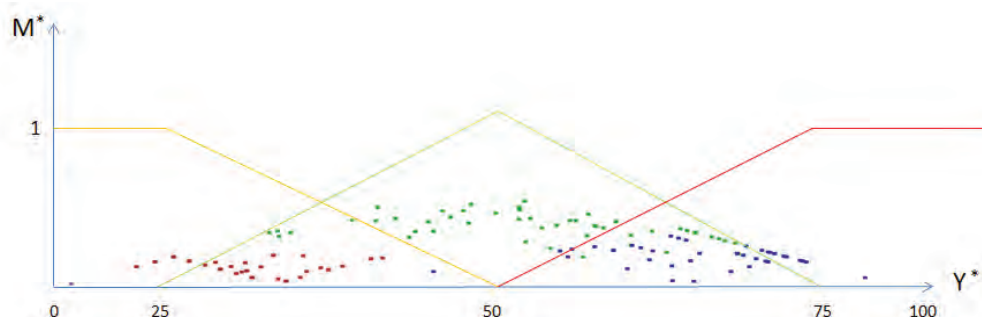


Рис. 2. Загальний розподіл об'єктів

Таблиця 1

X	Вхідні параметри				Дефазифіковані значення $Y^*$ та $M^*$	Результат 1-го етапу класифікації (проміжної класифікації)	$card^d_{z_j}(Y)$			Результат класифікації	Дійсне значення
	sepalLength	sepalWidth	petalLength	petalWidth			$z_j = \text{Setosa}$	$z_j = \text{Versicolor}$	$z_j = \text{Virginica}$		
1	4.9	3.1	1.5	0.2	31.25, 0.45	Клас_I Клас_II	8	0	0	Setosa	Setosa
10	5.1	3.3	1.7	0.5	33.81, 0.46	Клас_I Клас_II	7	0	0	Setosa	Setosa
14	5.8	2.7	3.9	1.2	48.97, 0.38	Клас_I Клас_II	0	5	0	Versicolor	Versicolor
20	5.6	3	4.5	1.5	55.49, 0.4	Клас_II Клас_III	0	5	0	Versicolor	Versicolor
21	7.7	2.6	6.9	2.3	63.06, 0.49	Клас_II Клас_III	0	0	5	Virginica	Virginica
26	6.3	2.5	5	1.9	59.10, 0.47	Клас_II Клас_III	0	0	3	Virginica	Virginica
27	6	2.7	5.1	1.6	57.81, 0.44	Клас_II Клас_III	0	4	6	Virginica	Versicolor
30	6.3	2.5	4.9	1.5	56.28, 0.45	Клас_II Клас_III	0	6	3	Virginica	Versicolor

Таблиця 2

sepalLength	sepalWidth	petalLength	petalWidth	Клас
0.3	0.1	0.1	0.8	Setosa
0.9	0.3	510.1	0.8	Virginica

змінної *petalLength* (в табл. 3 виділено сірим кольором).

Покажемо вплив робастного визначення границь термів МН на результат класифікації. На рис. 3, рис. 4 наведено розподіл об'єктів між проміжними класами, який отримано для термів, границі яких визначалися з використанням АМ (рис. 3) і МН (рис. 4).

У випадку, коли границі термів обчислювались з використання АМ (рис. 3), отримані класи об'єктів *Setosa* (об'єкти позначено трикутником), *Versicolor* (об'єкти позначено квадратами), *Virginica* (об'єкти позначено колом) погано розрізняються. У випадку застосування МН для обчислення границь термів (рис. 4) класи добре

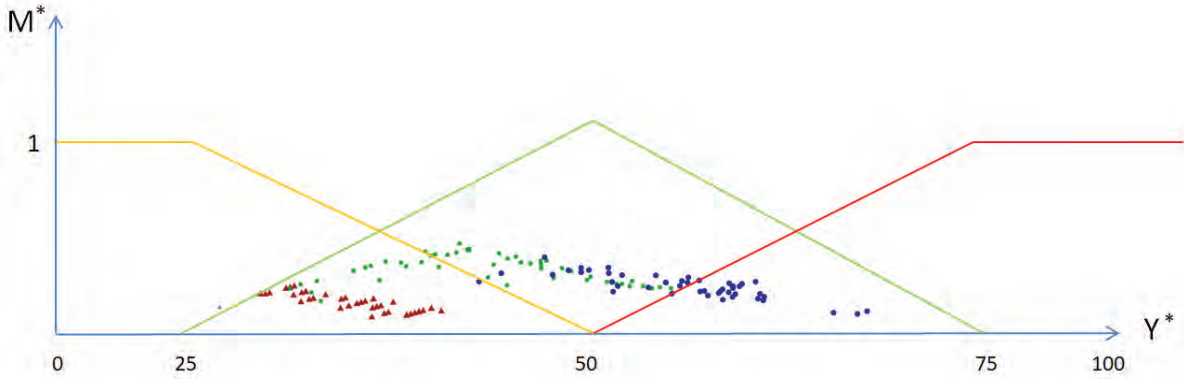


Рис. 3. Розподіл об'єктів між проміжними класами, обчислений з використанням АМ

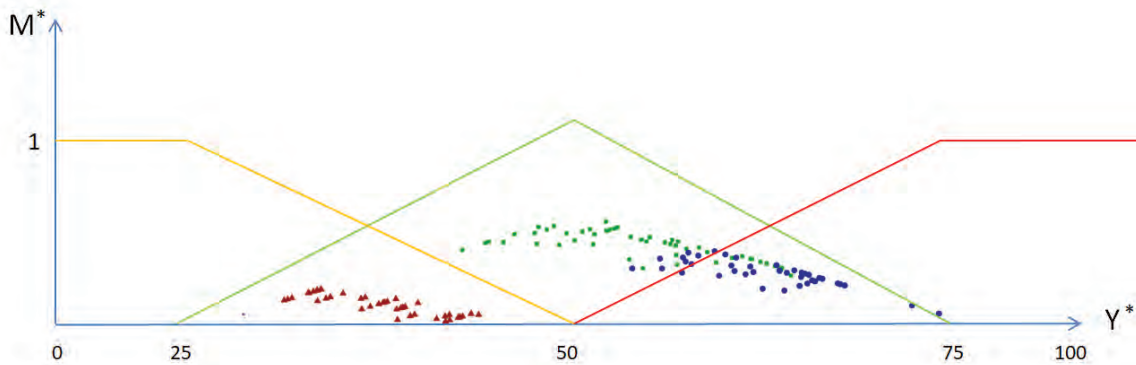


Рис. 4. Розподіл об'єктів між проміжними класами, обчислений з використанням МН

Таблиця 3

Лінгвістичні змінні	Лінгвістичні значення	Границі термів (МН)	Границі термів (АМ)	Границі термів (МН) при додаванні аномальних об'єктів	Границі термів (АМ) при додаванні аномальних об'єктів
sepalLength	low	[4.3, 5.75]	[4.3, 5.85]	[0.3, 5.75]	[0.3, 5.7]
	mid	[5.025, 6.025]	[5.07, 6.88]	[3.025, 6.825]	[3.01, 6.80]
	high	[5.75, 7.9]	[5.85, 7.9]	[5.75, 7.9]	[5.7, 7.9]
sepalWidth	low	[2.0, 3.099]	[2.0, 3.06]	[0.1, 3.099]	[0.1, 2.98]
	mid	[2.55, 3.75]	[2.53, 3.73]	[1.59, 3.75]	[1.54, 3.69]
	high	[3.099, 4.4]	[3.06, 4.4]	[3.099, 4.4]	[2.98, 4.4]
petalLength	low	[1.0, 3.35]	[1.0, 3.76]	[0.1, 3.30]	[0.1, 6.97]
	mid	[2.175, 5.125]	[2.38, 5.33]	[1.7, 256.7]	[3.54, 258.54]
	high	[3.35, 6.9]	[3.76, 6.9]	[3.30, 510.1]	[6.97, 510.1]
petalWidth	low	[0.1, 1.05]	[0.1, 1.2]	[0.1, 1.05]	[0.1, 1.19]
	mid	[0.575, 1.775]	[0.65, 1.85]	[0.575, 1.775]	[0.65, 1.85]
	high	[1.05, 2.5]	[1.2, 2.5]	[1.05, 2.5]	[1.19, 2.5]



Таблиця 4

	Метод визначення границь термів	accuracy	precision	recall	f1-score
Звичайна вибірка	МН	0,87	0,87	0,83	0,84
	АМ	0,86	0,85	0,82	0,83
Вибірка з аномальними об'єктами	МН	0,84	0,84	0,81	0,82
	АМ	0,40	0,38	0,35	0,36

Таблиця 5

Розмір навчальної вибірки (навчальна/тестова)	accuracy	precision	recall	f1-score
130/20	0,87	0,87	0,83	0,84
120/30	0,87	0,87	0,83	0,84
100/50	0,83	0,83	0,80	0,81
75/75	0,77	0,77	0,75	0,75

розрізняються, незначні перетинання присутні для об'єктів Versicolor (позначено квадратами), Virginica (позначено колом).

У таблиці 4 наведені значення метрик якості результатів класифікації з використанням різних способів обчислення границь термів. З аналізу таблиці видно, що використання міжквартильного середнього для визначення границь термів дозволяє отримати прийнятну точність класифікації для вибірок, які містять об'єкти з аномальними характеристиками.

У роботі досліджувалося питання впливу способу розбиття вибірки на навчальну і тестову, а також розміру навчальної вибірки на якість класифікації. Результати порівняння наведені в табл. 5.

З аналізу результатів випливає, що розмір навчальної вибірки впливає на результат класифікації, зі зменшенням обсягу навчальної вибірки якість класифікації погіршується.

**Висновки.** У роботі для розв'язання задачі класифікації запропоновано використовувати нечітку модель представлення знань, побудовану на базі навчальної вибірки, та систему нечіткого логічного виводу. Генерація системи

нечітких логічних правил відбувається автоматично, налаштування моделі здійснюється в процесі навчання з використанням навчальної вибірки. Для зменшення впливу наявності аномальних об'єктів в навчальній вибірці на результат класифікації для визначення границь термів використовується міжквартильне середнє. Побудовано двохетапну процедури класифікації з використанням допоміжних нечітких класів об'єктів, які потім відображаються в чіткі вихідні класи. Наведено порівняння результатів класифікації з використанням запропонованого в роботі двохетапного походу і класичного алгоритму нечіткої класифікації. Виконано числовий аналіз впливу параметрів моделі та розмірів вибірки на якість класифікації.

Запропонований підхід дозволяє мінімізувати участь експерта під час формування системи правил та налаштування моделі нечіткої класифікації.

Надалі планується застосування запропонованого підходу до класифікації наборів даних, що містять об'єкти зі значною кількістю ознак та важко класифікуються з використанням класичних підходів.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Штовба С.Д. Классификация объектов на основе нечеткого логического вывода. *Exponenta Pro – Математика в приложениях*. 2004. № 1. С. 68–69.
2. Романов В.Н. Применение нечетких моделей в задачах классификации. *Альманах современной науки и образования*. Тамбов: Грамота. 2014. № 5-6(84). С. 108-112. ISSN 1993-5552.
3. Кучеренко Е.И., Глушенкова И.С., Глушенков С.А. Нечеткое разбиение объектов на основе критериев плотности. *Радиоелектроніка, інформатика, управління*. 2016. № 1(36). Зр. 32-39. doi:10.15588/1607-3274-2016-1-4.
4. Пташко Е.А., Ухоботов В.И. Автоматическая генерация нечетких правил для управления мобильным роботом с гусеничным шасси на основе числовых данных. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика*. 2017. Vol. 6, №. 3. Рр. 60–72.
5. Edward R. Tufte. *The Visual Display of Quantitative Information*. Second Edition. Graphics Press, Box 430, Cheshire, Connecticut, 2007. pp. 191.
6. Терлецкий Д.А., Проватар А.И. Нечеткие объектно-ориентированные динамические сети. *Кибернетика и системный анализ*. Киев, 2015. том 51. № 1. С. 40–47.



7. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткая логика, генетические алгоритмы, нейронные сети. URL : <http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book5/index.php>.
8. Гук Н.А., Єгошкін Д.І., Сірик С.Ф. Алгоритм класифікації на базі нечіткої логіки з розширюваною кількістю виводів. *Питання прикладної математики і математичного моделювання* : Зб. наук. пр. Дніпро. 2018. Вип. 18. С. 67–76.
9. Richard O. Duda, Peter E. Hart, David G. Stork *Pattern Classification*, 2nd Edition. Wiley-Interscience, 2001. 688 p.

#### REFERENCES

1. Shtovba S.D. (2004) Klassifikatsiya ob"yektov na osnove nechetkogo logicheskogo vyvoda. *Exponenta Pro – Matematika v prilozheniyakh*. no. 1, pp. 68-69.
2. Romanov V.N. (2014) Primeneniye nechetkikh modeley v zadachakh klassifikatsii. *Al'manakh sovremennoy nauki i obrazovaniya. Tambov: Gramota*. No. 5-6 (84), pp. 108-112. ISSN 1993-5552.
3. Kucherenko Ye.I., Glushenkova I.S., Glushenkov S.A. (2016) Nechetkoye razbiyeniye ob"yektov na osnove kriteriyev plotnosti. *Radioelektronika, informatika, upravlinnya*. No. 1 (36), pp. 32-39. doi:10.15588/1607-3274-2016-1-4
4. Ptashko Ye.A., Ukhobotov V.I. (2017) Avtomaticheskaya generatsiya nechetkikh pravil dlya upravleniya mobil'nym robotom s gusenichnym shassi na osnove chislovykh dannykh. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Vychislitel'naya matematika i informatika*. Vol. 6, no. 3, pp. 60-72.
5. Tufte E.R. (2007) *The Visual Display of Quantitative Information. Second Edition*. Graphics Press, Box 430, Cheshire, Connecticut.
6. Terletskiy D.A., Provotar A.I. (2015) Nechetkiye ob"yektno-oriyentirovannyye dinamicheskiye seti. *Kibernetika i sistemnyy analiz*. Vol. 51, no. 1, pp. 40-47.
7. Rotshteyn A.P. "Intellektual'nyye tekhnologii identifikatsii: nechetkaya logika, geneticheskiye algoritmy, neyronnyye seti". URL: <http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book5/index.php>
8. Huk N.A., Yehoshkin D.I., Siryk S.F. (2018) Alhorytm klasyfikatsiyi na bazi nechitkoyi lohiky z rozshyryuvanoyu kil'kisty vyvodiv. *Pytannya prykladnoyi matematyky i matematychnoho modelyuvannya*. Vol. 18, pp. 67-76.
9. Duda R.O., Hart P.E., Stork D.G. (2001) *Pattern Classification, 2nd Edition*. Wiley-Interscience.

## **ЧИСТИЙ ЗГИН СМУГИ (БАЛКИ) ІЗ ДВОМА СПІВВІСНИМИ ТРІЩИНАМИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИМИ ДО ЇЇ ОСІ, ОДНА З ЯКИХ ЗНАХОДИТЬСЯ В ЗОНІ СТИСКАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ**

**Опанасович В. К.**

*доктор фізико-математичних наук, професор,  
професор кафедри механіки  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, Україна  
[orcid.org/0000-0002-7248-4505](https://orcid.org/0000-0002-7248-4505)  
[opanasovuch.viktor@gmail.com](mailto:opanasovuch.viktor@gmail.com)*

**Слободян М. С.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри механіки  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, Україна  
[orcid.org/0000-0001-5357-8584](https://orcid.org/0000-0001-5357-8584)  
[slobkolia@gmail.com](mailto:slobkolia@gmail.com)*

**Білаш О. В.**

*кандидат економічних наук, доцент,  
доцент кафедри інженерної механіки  
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного  
вул. Героїв Майдану, 32, Львів, 79012, Україна  
[orcid.org/0000-0001-7515-7641](https://orcid.org/0000-0001-7515-7641)  
[oksana.bilash@gmail.com](mailto:oksana.bilash@gmail.com)*

**Ключові слова:** *чистий згин, смуга (балка), тріщина, гладкий контакт берегів тріщини, комплексні потенціали, задачі лінійного спряження, коефіцієнти інтенсивності напружень, критичне навантаження.*

У роботі досліджена задача про чистий згин зосередженою смуги (балки) з двома співвісними наскрізними тріщинами різної довжини, береги яких вільні від зовнішнього навантаження. Тріщини перпендикулярні до осі балки, причому одна з тріщин частково знаходиться в зоні стискальних напружень, так що її береги частково гладко контактують, тобто в області контакту берегів тріщини має місце рівність контактних напружень та відповідних компонент переміщень, а дотичні напруження рівні нулю. Друга тріщина перебуває в зоні розтягувальних напружень. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали двовимірної теорії пружності, розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження, отримано явний вигляд для комплексних потенціалів та коефіцієнтів інтенсивності напружень. Записано рівняння для знаходження параметра, за допомогою якого визначають довжину області контакту берегів тріщини. На основі енергетичного критерію руйнування знайдено критичне значення згинального моменту, при якому смуга (балка) зруйнується. Проведено числовий аналіз задачі, з якого випливає, що при наближенні неконтактуючої тріщини до контактуючої область контакту останньої зменшується, а при її віддаленні наближається до області контакту для одинокої контактуючої тріщини, одна вершина якої знаходиться в зоні стискальних напружень балки, а інша – в зоні

розтягувальних напружень. Зауважимо, що руйнування балки може відбуватися як з вершини контактуючої тріщини, яка знаходиться в зоні розтягувальних напружень балки, так і з вершини неконтактуючої тріщини залежно від її положення і розмірів. При цьому повністю контактуюча тріщина не впливає на напружено-деформований стан балки.

## PURE BENDING OF STRIP (BEAM) WITH TWO COAXIAL CRACKS PERPENDICULAR TO ITS AXIS AND ONE OF THEM IS LOCATED IN ZONE OF COMPRESSIVE STRESSES

**Opanasovych V. K.**

*Doctor in Physics and Mathematics, Professor,  
Professor at the Department of Mechanics  
Ivan Franko National University of Lviv  
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-7248-4505  
opanasovuch.viktor@gmail.com*

**Slobodyan M. S.**

*Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Mechanics  
Ivan Franko National University of Lviv  
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-5357-8584  
slobkolia@gmail.com*

**Bilash O. V.**

*Ph.D. in Economic Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Engineering Mechanics  
Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy  
Heroiv Maydana str., 32, Lviv, 79000, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-7515-7641  
oksana.bilash@gmail.com*

**Key words:** *pure bending, strip (beam), crack, smoothly contact of crack faces, complex potentials, linear conjunction problem, stress intensity factor, critical load.*

The problem of pure bending of concentrated strip (beam) with two coaxial through cracks that have different length and their faces are free from external load is solved in the article. Cracks are perpendicular to beam axis, moreover one of them is partly located in zone of compressive stresses and its faces partly smoothly contact, scilicet in contact zone of crack faces is equaling of contact stress and relevant displacement component and tangent stress is equal zero. The second crack is located in the zone of tensile stresses. Using methods of function of a complex variable theory and complex potentials of two-dimensional stresses theory, solution of the problem is reduced to the linear conjunction problem. Explicit view for complex potentials and stress intensity factors is received. Equation for finding parameter by which determine length of contact zone of crack faces is written. Based on energy fraction criteria the critical value of bending moment at which strip (beam) will destroyed is found

Numerical analysis of the problem is done. From this analysis follows that: if non-contact crack is approaches to the contact crack the contact zone of the last is decreases; if non-contact crack is distances from the contact crack then its approaches to contact zone for lonesome contact crack. One top of this

lonesome contact crack is located in zone of compressive stresses of the beam and the second top is located in zone of tensile stresses.

Notice, that destruction of the beam can occur both from the top of contact crack, which is located in zone of tensile stress and from the top of non-contact crack depending on its position and size. At the same time, completely contact crack does not effect on the tensely strained condition of the beam.

**Вступ.** Балочні елементи конструкцій широко використовуються в інженерній практиці. Вони можуть містити тріщини, які є сильним концентратором напружень, що значно зменшує надійність і міцність такого конструктивного елемента.

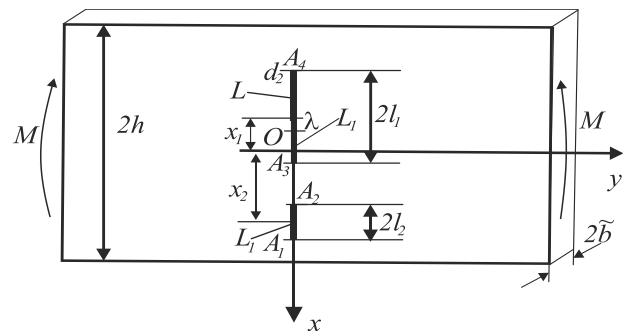
Під дією зовнішнього навантаження береги тріщин можуть контактувати. Дослідженням плоских контактних задач теорії тріщин в однорідних тілах займалось багато дослідників, вони розвинули методи розв'язування такого типу задач, що відображено у працях Масаківського В.І., Загубіженка П.А. [1], Гриліцького Н.Д., Кіта Г.С. [2], Гриліцького Д.В., Луцишина Р.М. [3], Панасюка В.В., Лозового Б.А. [4; 5], Саврука М.П. [6], Фильштинського Л.А., Хвороста В.Ф. [7], Guz A. N., Zozulya V.V. [8]. У науковій літературі є велика кількість критеріїв руйнування тіл із тріщинами [10–12].

У працях [4; 5] досліджені задачі згину смуги (балки) з тріщиною перпендикулярною до її осі. Розглянуто випадок тріщини симетрично розміщеної відносно її осі, береги якої контактують, так і випадок тріщини розміщеної в зоні розтягуючи напружень. Використовуючи методи теорій функцій комплексної змінної та комплексні потенціали, розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження та сингулярного інтегрального рівняння відносно невідомих контактних напружень, визначено комплексні потенціали, довжину області контакту, граничне навантаження, коли тріщина почне поширюватися.

У даній роботі досліджена подібна задача, про чистий згин смуги (балки), коли в ній наявні дві співвісні тріщини нерівної довжини, які перпендикулярні до її осі, причому береги однієї з тріщин приходять у гладкий контакт по деякій її частині, а інша тріщина перебуває в зоні розтягуючи напружень. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали, розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження, знайдено явні вирази для комплексних потенціалів, записано рівняння для знаходження довжини області контакту берегів тріщини, визначено коефіцієнти інтенсивності напружень, а на основі енергетичного критерію руйнування [11; 12] знайдено критичне значення моменту, при якому балка почне руйнуватися.

**Формулювання задачі.** Дослідимо напружено-деформований стан ізотропної смуги (балки), з прямолінійними наскрізними співвісними тріщинами, завдовжки  $2l_j$  ( $j=1,2$ ) перпендикулярними до її осі. Береги тріщини вільні від зовнішнього

навантаження, а балка перебуває в умовах чистого згину зі згинальним моментом  $M$ . Нехай  $2h$  – висота поперечного перерізу смуги, а  $2\tilde{b}$  – його ширина. Вважаємо, що береги однієї з тріщин під дією зовнішнього навантаження прийшли в гладкий контакт по деякій частині, а інша тріщина перебуває в зоні розтягуючи напружень. Введемо декартову систему координат  $Oxy$ , у серединній площині смуги, направивши вісь  $Oy$  по осі балки, а вісь  $Ox$  вздовж лінії, де розміщені тріщини. Позначимо вершини тріщини через  $A_j$  ( $j=1,4$ ), яким відповідають координати  $(a_j, 0)$  (див. рис. 1), при цьому координати кінця області контакту берегів тріщини будуть  $(\lambda, 0)$ . Відрізок дійсної осі, де береги тріщини контактують позначимо через  $L$ , а де береги тріщин не контактують – через  $L_1$ . Абсциси центрів тріщин позначимо через  $x_j$  ( $j=1,2$ ).



**Рис. 1. Схема навантаження балки та розміщення тріщин**

Згідно формулювання задачі маємо такі крайові умови

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{\pm} = 0, \quad \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad x \in L_1; \quad \sigma_{yy}^{+} = \sigma_{yy}^{-}, \\ v^{+} - v^{-} = 0, \quad \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad x \in L; \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\sigma_{yy}$  і  $\sigma_{xy}$  – компоненти тензора напружень; значками  $+$  і  $-$  позначено граничне значення відповідної величини при  $y \rightarrow \pm 0$ ,  $v$  – компонента вектора переміщення точки балки на вісь  $Oy$ .

**Побудова розв'язку задачі.** Введемо комплексні потенціали  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  [9] та скористаємося залежностями

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (2)$$

$$2\mu\partial_x(u + iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (3)$$

де  $\mu$  – модуль зсуву;  $\kappa$  – стала Мусхелішвілі;  $\partial_x f = \partial f / \partial x$ ;  $u$  – компонента вектора переміщення точки балки на осі  $Ox$ ,  $z = x + iy$ ,  $i^2 = -1$ .

Згідно [6] функції  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  за великих  $|z|$  можна подати у вигляді

$$\Phi(z) = Cz/4 + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Omega(z) = 3Cz/4 + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (4)$$

де  $C = M/I$ ,  $I$  – момент інерції попереченого перерізу балки відносно його нейтральної лінії,  $I = 4bh^3/3$ .

Із крайової умови

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = 0, \quad x \in L + L_1.$$

з урахуванням (2) отримаємо

$$(\Phi(x) - \Omega(x))^+ - (\Phi(x) - \Omega(x))^- = 0, \quad x \in L + L_1. \quad (5)$$

Врахувавши (4) та розв'язавши задачу лінійного спряження (5), одержимо

$$\Phi(z) - \Omega(z) = -\frac{C}{2}z. \quad (6)$$

Із крайової умови

$$\sigma_{xy}^+ + \sigma_{xy}^- = 0, \quad x \in L + L_1,$$

врахувавши (2) і (6), одержимо

$$(\Phi(x) + \bar{\Phi}(x))^+ + (\Phi(x) + \bar{\Phi}(x))^- = 0, \quad x \in L + L_1. \quad (7)$$

Якщо розв'язати задачу лінійного спряження (7) та врахувати (4), то матимемо

$$\Phi(z) - \bar{\Phi}(z) = 0. \quad (8)$$

Із крайових умов

$$v^+ - v^- = 0, \quad x \in L,$$

$$\sigma_{yy}^+ + \sigma_{yy}^- = 0, \quad x \in L_1,$$

беручи до уваги (3), (2) та (6), отримаємо

$$[\Phi(x) + \bar{\Phi}(x)]^+ - [\Phi(x) + \bar{\Phi}(x)]^- = 0, \quad x \in L, \quad (9)$$

$$[\Phi(x) + \bar{\Phi}(x)]^+ + [\Phi(x) + \bar{\Phi}(x)]^- = 0, \quad x \in L_1.$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (9), матимемо

$$\Phi(z) + \bar{\Phi}(z) = -\frac{Cz}{2} + 2X(z)P(z). \quad (10)$$

де

$$X(z) = \sqrt{\frac{z - \lambda}{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)}}, \quad (11)$$

$$P(z) = C_0 + C_1z + C_2z^2, \quad (12)$$

$C_j (j = 0, 2)$  – невідомі сталі.

Додаючи (8) і (10), одержимо

$$\Phi(z) = -\frac{Cz}{4} + X(z)P(z). \quad (13)$$

Зауважимо, коли  $\lambda = a_3$ , тобто перша тріщина повністю приходить у гладкий контакт, то в цьому випадку

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)}},$$

то як видно з (13), (6), (2), (3) повністю контактуюча тріщина не впливає на напружено-деформований стан смуги (балки).

Виберемо вітку функції  $X(z)$  таку, яка при великих  $|z|$  має розв'инення

$$X(z) = \frac{1}{z} + \frac{\rho_1}{z^2} + \frac{\rho_2}{z^3} + \dots, \quad (14)$$

$$\text{де } \rho_1 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 a_i - \lambda \right), \quad \rho_2 = \frac{1}{8} \left\{ 3(a_1^2 + a_2^2) + 2a_1a_2 + \right.$$

$$\left. + (a_3 - \lambda)[2(a_1 + a_2) + 3a_3 + \lambda] \right\}. \quad (15)$$

Розвиваючи праву і ліву частину залежності (13) в ряди при великих  $|z|$  та враховуючи (4), (12), (14), (15), отримаємо

$$c_2 = \frac{C}{2}, \quad c_1 = -\frac{C}{4} \left( \sum_{i=1}^3 a_i - \lambda \right),$$

$$c_0 = \frac{C}{16} \left\{ (a_3 - \lambda)[2(a_1 + a_2) - a_3 - 3\lambda] - (a_1 - a_2)^2 \right\}. \quad (16)$$

Знайдемо параметр  $\lambda$ , за допомогою якого можна знайти довжину контактуючої частини тріщини.

Врахувавши залежність (3), можемо записати

$$2\mu \partial_x \left[ (u + iv)^+ - (u + iv)^- \right] = \quad (17)$$

$$= \kappa \left[ \Phi^+(x) - \Phi^-(x) \right] + \Omega^+(x) - \Omega^-(x), \quad x \in L.$$

Якщо прийняти до уваги (6), то з (17) отримаємо

$$2\mu \partial_x (v^+ - v^-) = (\kappa + 1) \text{Im} \left[ \Phi^+(x) - \Phi^-(x) \right], \quad x \in L. \quad (18)$$

Так як

$$\int_{a_3}^{\lambda} \partial_x (v^+ - v^-) dx = 0, \quad (19)$$

то врахувавши (13) і (18), з (19) одержимо рівняння для знаходження параметра  $\lambda$ , тобто довжини зони контакту берегів тріщини

$$\int_{a_3}^{\lambda} P(x) \sqrt{\frac{x - \lambda}{(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x)}} dx = 0. \quad (20)$$

В (20) зробимо заміну

$$x = au + b,$$

в результаті отримаємо

$$\int_{-1}^1 \tilde{P}(u) \sqrt{\frac{1 - u}{(1 + u)(c - u)(d - u)}} du = 0, \quad (21)$$

де

$$a = \frac{\lambda - a_3}{2}, \quad b = \frac{\lambda + a_3}{2}, \quad c = \frac{a_2 - b}{a}, \quad d = \frac{a_1 - b}{a},$$

$$\tilde{P}(u) = P(au + b).$$

Інтеграл, що входить у (21) будемо вираховувати числово [6], в результаті матимемо



$$\sum_{m=1}^M \sin^2 \frac{gm-1}{4M} \pi \tilde{P}(t_m) \frac{1}{\sqrt{(c-t_m)(d-t_m)}} = 0,$$

де

$$t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad m = \overline{1, M}.$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень знайдемо за формулами [6]

$$K_{1j} - iK_{2j} = 2 \lim_{x \rightarrow a_j+0} \left[ \sqrt{2(x-a_j)} \Phi(x) \right], \quad j = 1, 3, \tag{23}$$

$$K_{12} - iK_{22} = 2 \lim_{x \rightarrow a_2-0} \left[ \sqrt{2(a_2-x)} \Phi(x) \right].$$

Якщо врахувати (13), то для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (23) отримаємо наступні формули

$$K_{11} = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{a_1 - \lambda}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}} P(a_1),$$

$$K_{12} = -2\sqrt{2} \sqrt{\frac{a_2 - \lambda}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}} P(a_2), \tag{24}$$

$$K_{13} = -2\sqrt{2} \sqrt{\frac{a_3 - \lambda}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}} P(a_3), \quad K_{2j} = 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Для визначення критичного значення моменту  $M$ , коли смуга (балка) зруйнується, скористаємося енергетичним критерієм руйнування [11; 12]

$$\gamma^* = \frac{\pi}{8b^2 E} (K_1^2 + K_2^2), \tag{25}$$

де  $E$  – модуль Юнга,  $\gamma^*$  – густина ефективної поверхневої енергії.

Якщо ввести позначення

$$K_{1j} = 2\sqrt{2} \frac{M l_1}{I} K_{1j}^*, \tag{26}$$

то для визначення критичного моменту будемо таку залежність

$$M^* = \frac{M l_1}{\tilde{b}^2 h^3 \sqrt{E \gamma^*}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{K_{1j}^*}, \quad (j = \overline{1, 3}), \tag{27}$$

де

$$K_{11}^* = \sqrt{\frac{\tilde{a}_1 - \tilde{\lambda}}{(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2)(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_3)}} P_0(\tilde{a}_1),$$

$$K_{12}^* = -\sqrt{\frac{\tilde{a}_2 - \tilde{\lambda}}{(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2)(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_3)}} P_0(\tilde{a}_2),$$

$$K_{13}^* = -\sqrt{\frac{\tilde{a}_3 - \tilde{\lambda}}{(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_3)(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_3)}} P_0(\tilde{a}_3),$$

$$\tilde{a}_i = a_i / l_1, \quad \tilde{l}_2 = l_2 / l_1, \quad \tilde{x}_i = x_i / l_1, \quad \tilde{a}_1 = \tilde{x}_2 + \tilde{l}_2,$$

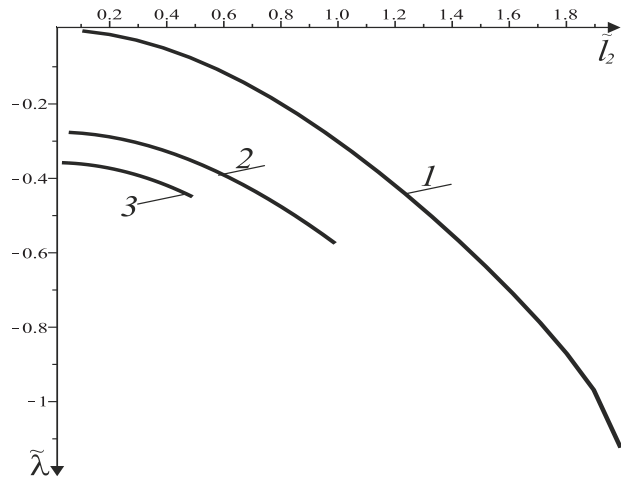
$$\tilde{a}_2 = \tilde{x}_2 - \tilde{l}_2, \quad \tilde{a}_3 = \tilde{x}_1 + 1, \quad \tilde{a}_4 = \tilde{x}_1 - 1,$$

$$P_0(x) = \tilde{c}_2 x^2 + \tilde{c}_1 x + c_0, \quad \tilde{c}_2 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{c}_1 = -\frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^3 \tilde{a}_i - \tilde{\lambda} \right),$$

$$\tilde{c}_0 = \frac{1}{16} \left\{ (\tilde{a}_3 - \tilde{\lambda}) [2(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) - \tilde{a}_3 - 3\tilde{\lambda}] - (\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2)^2 \right\}.$$

Так як  $a_3 < a_2$ , то має виконуватись нерівність  $\tilde{x}_2 - \tilde{l}_2 > \tilde{x}_1 + 1$ .

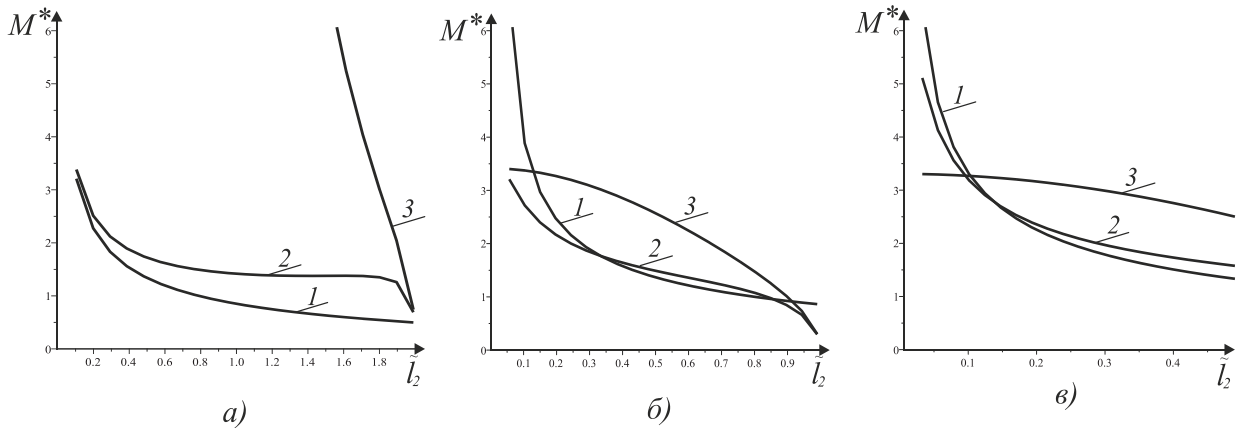
**Числовий аналіз та висновки.** Був проведений числовий аналіз задачі, який поданий на рис. 2 – рис. 4.



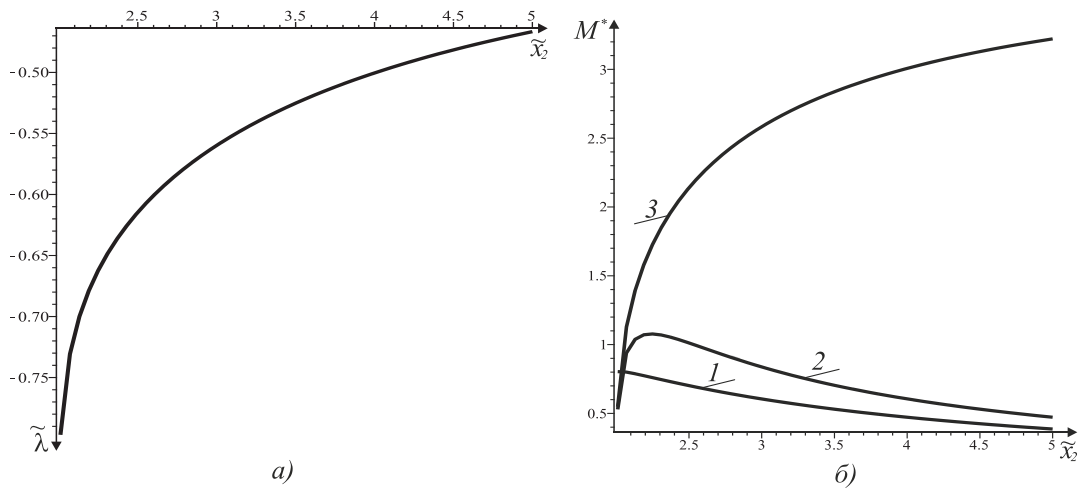
**Рис. 2.** Графічна залежність параметра  $\tilde{\lambda}$  від приведеної довжини неконтактуючої тріщини при різному положенні центру контактуючої тріщини

На рис. 2 дається графічна залежність параметра  $\tilde{\lambda} = \lambda / l_1$  від зведеної довжини другої тріщини, коли  $\tilde{x}_2 = x_2 / l = 2$ , при різному положенні центру першої тріщини  $\tilde{x}_1 = x_1 / l$ . Крива 1 відповідає випадку, коли перша тріщина знаходиться в зоні стискальних напружень  $\tilde{x}_1 = -1$ . Крива 2, коли центр першої тріщини знаходиться на осі балки  $\tilde{x}_1 = 0$ . Крива 3, коли  $\tilde{x}_1 = 0,1$ . Як видно з цього рисунку, при зростанні відносної довжини другої тріщини  $\tilde{l}_2 = l_2 / l$ , довжина зони гладкого контакту першої тріщини зменшується, а коли  $\tilde{l}_2 \rightarrow 0$ , то  $\tilde{\lambda} \rightarrow -\frac{1}{3}(\tilde{x}_1 + 1)$ , тобто до довжини контакту однокривої тріщини.

На рисунку 3 дається графічна залежність критичного моменту  $M^*$  від відносної довжини другої тріщини  $\tilde{l}_2$ , при різному положенні центру  $\tilde{x}_1$  першої тріщини, коли  $\tilde{x}_2 = 2$ . Крива 1 відповідає найбільш віддаленій від осі балки вершині другої тріщини (дальньої)  $A_1$ , крива 2 – середній вершині цієї тріщини  $A_2$ , крива 3 – неконтактуючій вершині першої тріщини  $A_3$ . Рисунки 3а), 3б), 3в) відповідають випадку, коли приведений центр першої тріщини  $\tilde{x}_1$  знаходиться відповідно на віддалі  $\tilde{x}_1 = -1$ ,  $\tilde{x}_1 = 0$ ,  $\tilde{x}_1 = 0,1$ . Як видно з рисунка 3а), коли перша тріщина знаходиться в зоні стискальних напружень ( $\tilde{x}_1 = -1$ ) руйнування балки



**Рис. 3. Графічна залежність критичного моменту  $M^*$  від приведеної довжини неконтактуючої тріщини при різному положенні центру контактуючої тріщини**



**Рис. 4. Графічна залежність параметра  $\tilde{\lambda}$  (рис. а)) та критичного моменту  $M^*$  від положення центру неконтактуючої тріщини (рис. б))**

(смуги) буде проходити з дальньої вершини першої тріщини незалежно від її приведеної довжини. Якщо центр першої тріщини знаходиться на осі балки, що відповідає рис. 3б), то руйнування буде проходити з вершин другої тріщини. При малих значеннях  $\tilde{l}_2$  руйнування відбувається з середньої вершини другої тріщини, при подальшому зростанні  $\tilde{l}_2$  з дальньої вершини цієї тріщини, а потім знову з її середньої вершини тріщини. При віддаленні центру першої тріщини від осі балки, що відображена на рис. 3в), при цьому  $\tilde{x}_1 = 0,1$ , то при зростанні  $\tilde{l}_2$  від нуля, руйнування відбувається з неконтактуючої вершини першої тріщини, а при подальшому зростанні  $\tilde{l}_2$  з середньої вершини другої тріщини, а потім з її дальньої вершини.

Для випадку, коли центр першої тріщини знаходиться на осі балки, а довжини першої і другої

тріщини однакові, на рисунку 4а) дається графічна залежність параметру  $\tilde{\lambda}$ , а на рис. 4б) критичного моменту  $M^*$  від приведенного положення центру другої тріщини  $\tilde{x}_2$ . Позначення кривих на рис. 4б) такі ж, як на рис. 3. Як видно з рис. 4а) при віддаленні центру другої тріщини від першої тріщини довжина зони області її контакту зростає, а при великих  $\tilde{x}_2$  отримаємо результати для однієї ізольованої тріщини. На рис. 4б) дається графічна залежність зведеного критичного моменту  $M^*$  від параметра  $\tilde{x}_2$ . Як видно із цього рисунку, коли приведений центр другої тріщини наближається до 2, то руйнування балки починається з середньої вершини другої тріщини, а при зростанні  $\tilde{x}_2$  – з дальньої вершини цієї тріщини, при цьому величина критичного моменту  $M^*$  зменшується при зростанні  $\tilde{x}_2$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Моссаковский В.И., Загубиженко П.А. Об одной смешанной задаче теории упругости для плоскости, ослабленной прямолинейной щелью. *Докл. АН СССР*. 1954. 94, № 4. С. 409–412.
2. Грилицкий Н.Д., Кит Г.С. О напряженном состоянии в окрестности трещины с частично контактирующими берегами. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1978. № 8. С. 35–39.
3. Грилицкий Н.Д., Луцишин Р.М. Напряжения в пластинах з коловою лінією розмежування граничних умов. Львів: Вищ. шк., 1975. 116 с.
4. Лозовий Б.Л., Панасюк В.В. Некоторые задачи изгиб полосы с прямолинейной трещиной. *Изв. АН СССР. ОТН*. 1962. № 1. С. 138–143.
5. Панасюк В.В. Вибрані праці (1954-1970). НАН України. Фіз.-мех. інститут ім. Г.В. Карпенка. Львів, 2001. 450 с.
6. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. К.: Наук. думка, 1981. 324 с.
7. Фильштинский Л.А., Хворост В.Ф. Температурные напряжения в остывающем теле, ослабленном трещиной, с учетом контакта ее берегов. *Физ.-хим. механика материалов*. 1985. 21, № 3. С. 85–88.
8. Guz A.N., Zozulya V.V. Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with cracks. *Int. Appl. Mech.* 2002. 8, No. 8. P. 895–932.
9. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.
10. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності. Т.2. Львів: Світ, 1999. 420 с.
11. Hui C.Y., Zehnder A.T. A theory for the pasture of thin plates subjected to bending and twisting moments. *International Journal of fracture*. 1993. Vol. 61. P. 211–229.
12. Zehnder A.T., Viz M.J. Fracture mechanics of thin plates shells under combined membrane, bending and twisting loads. *Applied Mechanics Reviews*. 2005. Vol. 58. P. 37–48.

## REFERENCES

1. Mossakovskyy V.I., Zahubizhenko P.A. (1954) Ob odnoy smeshanoy zadache teoriiy uprugosti dlya ploskosti, oslablennoy pryamolineynoy shchely [About one mixed problem of the theory of elasticity for a plane weakened by a rectilinear slit]. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*. 94, No. 4. pp. 409–412. (in Ukrainian)
2. Hrylickyy N.D., Kit H.S. (1978) O napryajennom sostojanii v okresnosti treshchny s chastichno kontaktiruyushchymy beregamy [About the stress state in the vicinity of the crack with partially contacting faces]. *Matematichni metodi ta fiziko-mehanični polia*. No. 8. pp. 35–39. (in Ukrainian)
3. Hrylickyy N.D., Lucshyn R.M. (1975) Naprujennya v plasty nah z kolovoyu liniyeyu rozmejuvannya granychnykh umov [*Tension in plates with a line of stakes between border minds*]. Lviv: Vyshcha shkola. (in Ukrainian)
4. Lozovyy B.L., Panasyuk V.V. (1962) Nekotoryye zadachi izgib polosity s pryamolineynoy treshchinoy [Some problems of strip bending with straight crack]. *Ed. Academy of Sciences of the USSR. OTN*. No. 1. pp. 138–143. (in Ukrainian)
5. Panasyuk V.V. (2001) Vybrani praci [*Selected works*] (1954-1970). NAS of Ukraine. Phys.-mech. institute named after H.V. Karpenka. Lviv. (in Ukrainian)
6. Savruk M.P. (1981) Dvumernyye zadachi uprugosti dlya tel s treshchenami [*Two-dimensional elasticity problems for bodies with cracks*]. Kyiv: Naukova dumka. (in Ukrainian)
7. Filshinskyy L.A., Hworost V.F. (1985) Temperaturnyye napryajeniya v ostyvayushchem tele, oslablennoy tressshchenoy, s uchotom kontakta yeye beregov [Temperature stresses in a cooling body, weakened by a crack, taking into account the contact of its banks]. *Phys.-Chem. mechanics of materials*. 21, No. 3. pp. 85–88. (in Ukrainian)
8. Guz A.N., Zozulya V.V. (2002) *Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with cracks*. *Int. Appl. Mech.* 8, No. 8. P. 895–932.
9. Mushelishvili N.I. (1966) Nekotoryye osnovnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti [*Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*]. Moscow: Nauka. (in Ru)
10. Bozhydarnyk V.V., Sulym H.T. (1999) Елементи теорії пластичності та міцності [*Elements of plasticity and strength theory*]. Lviv: Svit. (in Ukrainian)
11. Hui C.Y., Zehnder A.T. (1993) *A theory for the pasture of thin plates subjected to bending and twisting moments*. *International Journal of fracture*. Vol. 61. pp. 211–229.
12. Zehnder A.T., Viz M.J. (2005) *Fracture mechanics of thin plates shells under combined membrane, bending and twisting loads*. *Applied Mechanics Reviews*. Vol. 58. pp. 37–48.

УДК 519.175  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-06>

## РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ЧИСЛА НЕІЗОМОРФНИХ $(n,m)$ -ГРАФІВ

**Стеганцева П. Г.**

*кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри загальної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0001-8871-139X](https://orcid.org/0000-0001-8871-139X)  
[stegpol@gmail.com](mailto:stegpol@gmail.com)*

**Артеменко А. О.**

*аспірант  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-6536-3086](https://orcid.org/0000-0002-6536-3086)  
[krummisvafiklettagja@gmail.com](mailto:krummisvafiklettagja@gmail.com)*

**Ключові слова:** вектор степенів графа, ізоморфізм, інваріант, звичайний граф, непомічений граф, перетворення.

Задача перерахування графів та підрахунку їх числа включає задачі перерахування та підрахунку числа помічених і числа непомічених графів. Друга з них вважається більш складною. Виділяють також задачі перерахування графів спеціального виду. Наприклад, помічених звичайних неорієнтованих графів, помічених звичайних орієнтованих графів, помічених зв'язних неорієнтованих графів, помічених дерев, непомічених гусениць та інших. Класичним результатом щодо перерахування графів вважають теорему Редфілда-Пойї, яка впливає з леми Бернсайда.

Граф  $G$  з  $n$  вершинами та  $m$  ребрами називають  $(n,m)$ -графом. Два  $(n,m)$ -графа називаються ізоморфними, якщо існує бієкція між множинами вершин, яка зберігає їх суміжність. Ця стаття присвячена задачі підрахунку числа  $T(n,m)$  неізоморфних звичайних  $(n,m)$ -графів з використанням поняття вектора степенів графа. Вектор степенів графа є його неповним інваріантом відносно ізоморфізмів. Послідовності чисел  $T(n,m)$  для  $n \leq 20$  можна знайти в Online енциклопедії цілочислових послідовностей під номером A008406. У цій статті досліджено властивості вказаної таблиці, одна з яких демонструє залежність між кількостями всіх попарно неізоморфних графів з  $m$  ребрами та кількостями вершин, що відрізняються на один. Показано, що коли в сукупності всіх попарно неізоморфних  $(n,m)$ -графів присутній граф з вектором степенів  $(1,1,\dots,1)$ , то  $n = 2m$ .

Отримано рекурентні співвідношення, що дозволили знайти деякі не наведені в таблиці кількості неізоморфних графів з  $n$  вершинами та  $m$  ребрами при  $n > 20$ . Для доведення рекурентних співвідношень введено поняття редукції вектора степенів графа (Р-перетворення). За допомогою Р-перетворення досліджено зв'язок між наборами попарно неізоморфних графів з однаковими кількостями ребер та різними кількостями вершин. Для підтвердження отриманих результатів була використана відома формула Харарі для знаходження числа неізоморфних звичайних графів.



## THE RECURRENCE RELATIONS FOR THE NUMBER OF THE NONISOMORPHIC $(n,m)$ -GRAPHS

**Stegantseva P. G.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Senior Lecturer at the Department of General Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-8871-139X  
stegpol@gmail.com*

**Artemenko A. O.**

*Postgraduate Student  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-6536-3086  
krummisvafiklettagja@gmail.com*

**Key words:** *degree sequence of graph, isomorphism, invariant, simple graph, unlabeled graph, transformation.*

The problem connected with the enumeration and the calculation of the graphs includes the problems connected with the enumeration and calculation of the labeled graphs and the unlabeled graphs. The second one is considered to be more difficult. There are also the problems connected with the enumeration of the graphs of certain type. For example, the enumeration of the labeled ordinary nondirected graphs, the labeled ordinary directed graphs, the labeled connected nondirected graphs, the labeled trees, the unlabeled trees and the others. Redfield – Polya theorem, which follows from Burnside lemma, is the classical result on the enumeration of the graphs.

The graph  $G$  with  $n$  vertices and  $m$  edges is called  $(n,m)$ -graph. Two  $(n,m)$ -graphs are called the isomorphic ones if the bijection exists between the sets of the vertices, which preserves their adjacency. The article deals with the problem connected with the calculation of  $T(n,m)$  nonisomorphic ordinary  $(n,m)$ -graphs using the concept of the vector of the degrees of the graph. The vector of the degrees of the graph is its noncomplete invariant with respect to the isomorphisms. The sequences of the numbers  $T(n,m)$  for  $n \leq 20$  can be found in the Online Encyclopedia of Integer Sequences under the number A008406. The properties of this table have been studied in the present article. One of these properties expresses the relation between the quantity of all pairwise nonisomorphic graphs with  $m$  edges and the number of vertices which differ by 1. It has been shown that if the collection of all pairwise nonisomorphic  $(n,m)$ -graphs contains the graph with the vector of the degrees  $(1,1,\dots,1)$ , then  $n = 2m$ .

The recurrence relations, which give an opportunity to find certain numbers of the nonisomorphic graphs with  $n$  vertices and  $m$  edges under  $n > 20$  which are not given in the table, have been obtained. The concept of the reduction of the vector of the degrees of the graph (P-transformation) has been introduced in order to prove the recurrence relations. The relation between the collections of the pairwise nonisomorphic graphs with the same number of the edges and the different number of the vertices has been studied with the help of P-transformation. The well-known Harary formula for the finding of the number of the nonisomorphic simple graphs has been used in order to confirm the correctness of the obtained results.

**Вступ.** Проблема ізоморфності графів є однією з основних задач теорії графів і поки що нерозв’язаною. Питанню перерахування неізоморфних непомічених графів приділялась увага у наукових роботах Харарі та Палмера. В цих роботах використовувався метод Пойа, який передбачає побудову групи підстановок та використання інваріантів цієї групи відносно ізоморфізмів. Зокрема, в роботі [1] кількість графів із заданим числом вершин та ребер подається у вигляді многочлену степеня  $C_n^2$ , де  $n$  – кількість вершин графа. Аналогічний підхід, пов’язаний з теорією інваріантів, було використано в роботі [2] у разі виведення формули для генеруючої функції кількості простих графів з  $n$  вершинами. Ще один варіант формули для обчислення кількості непомічених графів з’явився у результаті досліджень науковців з Нижнього Новгорода [3]. Відомий досить великий перелік інваріантних властивостей графів стосовно ізоморфізмів, які ефективно застосовуються для доведення неізоморфності графів. Зокрема, є цілий ряд так званих алгебраїчних інваріантів графа, які є предметом сучасних досліджень, як теоретичних, так і комп’ютерних [4]. Однією з таких властивостей є вектор степенів графа – неспадна послідовність степенів всіх вершин графа [5]. Позначають зазвичай  $S(G) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , де  $s_i$  – степінь вершини  $v_i$ . Очевидно, що вектори степенів ізоморфних графів співпадають, але обернене не завжди точне. У такому разі інваріант називають неповним.

Для звичайних графів, що розглядаються у статті, поняття вектора степенів графа використовується для дослідження властивостей числової таблиці, яка дає число  $T(n, m)$  неізоморфних  $(n, m)$ -графів для  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Фрагмент таблиці зображено на рисунку 1.

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
I	1	1														
II	1	1	1	1												
III	1	1	2	3	2	1	1									
IV	1	1	2	4	6	6	6	4	2	1	1					
V	1	1	2	5	9	15	21	24	24	21	15	9	5	2	1	1
VI																

**Рис. 1. Фрагмент таблиці чисел неізоморфних  $(n, m)$ -графів**

У кожному рядку рівновіддалені від його кінців елементи дорівнюють числу неізоморфних  $(n, m)$ -графів та  $(n, C_n^2 - m)$ -графів. Ці числа рівні між собою, оскільки з неізоморфності графів впливає неізоморфність їх доповнень.

Елементи таблиці можна також записати у вигляді послідовності. Вона наведена в Online енциклопедії цілочислових послідовностей під номером A008406 [6] і містить числа з 20 рядків таблиці. Для знаходження в цій послідовності

числа  $T(n, m)$  при  $n \leq 20$  та будь-якому  $m = 0, C_n^2$  користуються формулою  $\frac{(n-2)^3 + 6m + 8}{6}$ , яка у разі заданих значень  $m$  та  $n$  дає номер шуканого члена послідовності.

У цій статті отримано рекурентні співвідношення, що дозволяють обчислити деякі з елементів у 21–26 рядках вказаної таблиці.

**1. Зв’язок між наборами неізоморфних графів з  $m$  ребрами та деякі властивості таблиці**

Сформулюємо два очевидні твердження.

**Твердження 1.** Якщо в кожному з двох неізоморфних  $(n, m)$ -графів є принаймні одна ізольована вершина, то  $(n-1, m)$ -графи, отримані з таких графів видаленням однієї ізольованої вершини, також будуть неізоморфними. Обернено якщо два  $(n, m)$ -графа неізоморфні, то  $(n+1, m)$ -графи, отримані з них додаванням однієї ізольованої вершини, також неізоморфні.

**Твердження 2.** Нехай  $M$  – сукупність усіх попарно неізоморфних  $(n, m)$ -графів. Тоді у сукупності всіх попарно неізоморфних  $(n+1, m)$ -графів є підмножина, еквівалентна множині  $M$ , кожен граф якої отримується з деякого графа множини  $M$  додаванням однієї ізольованої вершини.

**Твердження 3.** Якщо у сукупності всіх попарно неізоморфних  $(n, m)$ -графів є граф з вектором степенів  $(1, 1, \dots, 1)$ , то  $n = 2m$ .

**Доведення.** Розглянемо граф з вектором степенів  $(1, 1, \dots, 1)$ . Оскільки число ребер дорівнює  $m$  то сума степенів усіх вершин за лемою про рукопотискання дорівнює  $2m$ , а оскільки кожна вершина має степінь 1, то число вершин дорівнює  $2m$ . Відзначимо, що  $(2m, m)$ -граф з вектором степенів  $(1, 1, \dots, 1)$  є єдиним графом без ізольованих вершин у сукупності всіх попарно неізоморфних  $(2m, m)$ -графів.

**Твердження 4.** Нехай  $k$  – число всіх попарно неізоморфних  $(2m, m)$ -графів. Тоді число всіх попарно неізоморфних  $(n, m)$ -графів за будь-якого  $n > 2m$  також дорівнює  $k$ .

**Доведення** впливає з тверджень 2 та 3. Із твердження 4 випливає, що в  $m$ -тому стовпці таблиці досить знайти числа в рядках з номерами до  $2m$  включно, тобто в наведеній таблиці відомі всі елементи стовпців з номерами до 10 включно.

**Твердження 5.** Нехай  $k$  – число всіх попарно неізоморфних  $(2m, m)$ -графів. Тоді число всіх попарно неізоморфних  $(2m-1, m)$ -графів дорівнює  $k-1$ .

**Доведення.** Серед  $k$  попарно неізоморфних  $(2m, m)$ -графів тільки один має вектор степенів  $(1, 1, \dots, 1)$ , усі інші  $k-1$  графів мають принаймні одну ізольовану вершину. У відповідності до твердження 2 після видалення з кожного графа однієї ізольованої вершини отримаємо набір з

$k-1$  попарно неізоморфних  $(2m-1, m)$ -графів, що і треба довести.

**2. Редукція вектора степенів графа (Р-перетворення)**

**Означення 1.** Нехай  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  – вектор степенів  $(n, m)$ -графу  $G$ . Нехай для деякого  $i$  виконується нерівність  $s_i \geq 2$  і  $(v_i, v_j)$  – одне з ребер, інцидентних вершині  $v_i$ . Додамо до графа нову ізольовану вершину  $v_{n+1}$ . Ребро  $(v_i, v_j)$  видалимо, а ребро  $(v_j, v_{n+1})$  додамо. Тоді степінь вершини  $v_i$  зменшиться на 1, а степінь нової вершини буде рівною 1. Будемо говорити, що виконано перетворення графа  $G$ , й називати його Р-перетворенням.

За допомогою Р-перетворення можна описати перехід від набору попарно неізоморфних  $(2m-k, m)$ -графів при  $k > 0$  до набору попарно неізоморфних  $(2m, m)$ -графів. У відповідності до твердження 2 у множині всіх попарно неізоморфних  $(2m, m)$ -графів є підмножина, еквівалентна множині всіх попарно неізоморфних  $(2m-k, m)$ -графів. Виділимо з множини всіх попарно неізоморфних  $(2m-k, m)$ -графів підмножину графів без ізольованих вершин. Серед них немає графа з вектором степенів  $(1, 1, \dots, 1)$ , оскільки тоді у відповідності до твердження 3 число вершин було б рівне  $2m$ . Застосуємо до них Р-перетворення, понизивши степінь однієї з вершин на 1. Отримаємо набір попарно неізоморфних  $(2m-k+1, m)$ -графів без ізольованих вершин. Якщо серед них немає графа з вектором степенів  $(1, 1, \dots, 1)$ , то до нового набору графів знову застосуємо Р-перетворення. Зрозуміло, що після  $k$ -того кроку отримаємо  $(2m, m)$ -граф з вектором степенів  $(1, 1, \dots, 1)$ . Для отримання повного набору попарно неізоморфних  $(2m, m)$ -графів треба всі отримані графи доповнити необхідною кількістю ізольованих вершин. Цей прийом застосовується в доведенні теореми 1.

**3. Доведення рекурентних співвідношень**

**Теорема 1.** Нехай  $T(n, m)$  – число попарно неізоморфних  $(n, m)$ -графів. Тоді мають місце такі співвідношення:

$$T(2m, m) = T(2m, 1) + T(2m-1, m), \quad m > 1 \quad (1)$$

$$T(2m, m) = T(2m, 2) + T(2m-2, m), \quad m > 2 \quad (2)$$

$$T(2m, m) = T(2m, 3) + T(2m-3, m), \quad m > 3 \quad (3)$$

$$T(2m, m) = T(2m, 4) + T(2m-4, m) + 1, \quad m > 5 \quad (4)$$

$$T(2m, m) = T(2m, 5) + T(2m-5, m) + 4, \quad m > 7 \quad (5)$$

$$T(2m, m) = T(2m, 6) + T(2m-6, m) + 4, \quad m > 9 \quad (6)$$

**Доведення.** З таблиці та твердження 4 маємо:  $T(2m, 1) = T(2, 1) = 1$  при  $m > 1$ ;  $T(2m, 2) = T(4, 2) = 2$  при  $m > 2$ ;  $T(2m, 3) = T(6, 3) = 5$  при  $m > 3$ ;  $T(2m, 4) = T(8, 4) = 11$  при  $m > 4$ ;  $T(2m, 5) = T(10, 5) = 26$  при  $m > 5$ ;  $T(2m, 6) = T(12, 6) = 68$  при  $m > 6$ . Тотожність (1) безпосередньо випливає з рівності  $T(2m, 1) = T(2, 1) = 1$  та твердження 5. Зупинимось, наприклад, на доведенні тотожності (3).

Нехай  $T(2m-3, m) = k$ . Розглянемо ті з цих графів, які не мають ізольованих вершин. Їх вектори степенів можуть мати тільки один з видів  $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2m-4}, 14)$ ,  $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2m-5}, 12, 3)$  і  $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2m-6}, 12, 2, 2)$ . При  $m > 5$  можливі 7 попарно неізоморфних графів  $G_1, G_2, \dots, G_7$  з такими векторами степенів. На рисунку 2 вони зображені при  $m = 6$ . При  $m > 6$  ці графи доповнюються компонентами зв'язності, які є  $(2, 1)$ -підграфами. При  $m = 5$  з цього набору треба видалити граф  $G_1$ , а при  $m = 4$  – графи  $G_1, G_2$  та  $G_5$ .

Будемо поступово додавати до цих графів по одній вершині, одночасно виконуючи Р-перетворення. Нам треба зробити три кроки, щоб отримати графи з  $2m$  вершинами. На кожному кроці у відповідності до означення 1  $(2, 1)$ -підграфи не перетворюються.

Після першого кроку отримаємо набір з трьох графів  $G'_1, G'_2$  та  $G'_3$  (рисунок 3). Вектори їх степенів мають вигляд  $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2m-3}, 1, 3)$  та  $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2m-4}, 1, 2, 2)$ .

На другому кроці графи  $G'_1, G'_2, G'_3$  перетворюються в один і той самий граф  $G''$ , який

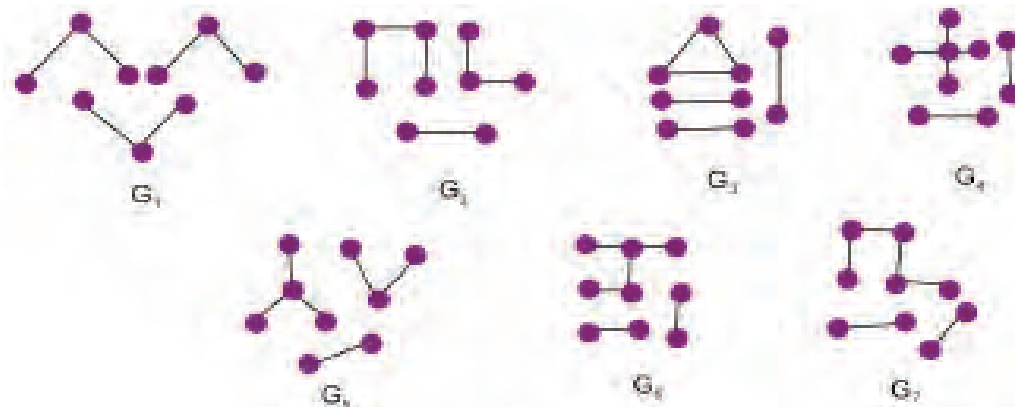


Рис. 2. Графи без ізольованих вершин при  $m = 6$

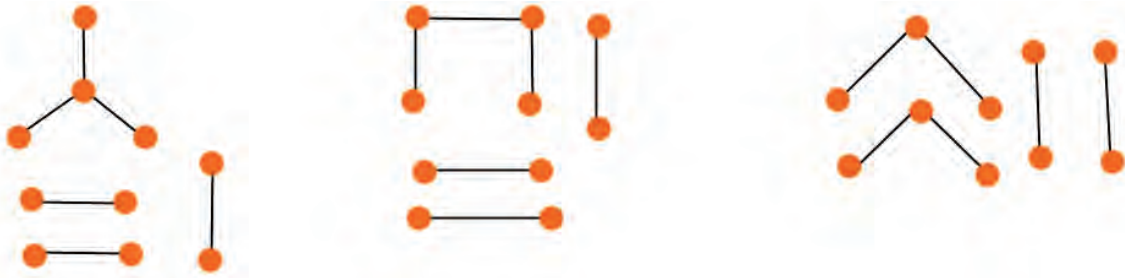


Рис. 3. Графи  $G'_1, G'_2, G'_3$  при  $m = 6$

складається з  $(2,1)$ -підграфів й одного  $(3,2)$ -підграфа, та має вектор степенів вигляду  $(1,1, \dots, 1, 2)_{2m-2}$ . Нарешті, після третього кроку отримаємо граф  $G$  з вектором степенів  $(1,1, \dots, 1)_{2m}$ , тобто він складається з  $m$  штук  $(2,1)$ -підграфів.

Повний набір попарно неізоморфних  $(2m, m)$ -графів складається з  $k$  вихідних графів, доповнених трьома ізолюваними вершинами, графів  $G'_1, G'_2, G'_3$ , доповнених двома ізолюваними вершинами, графа  $G''$ , доповненого однією ізолюваною вершиною, та графа  $G$ . Тотожність (3) доведена.

Для доведення тотожності (4) покладемо  $T(2m-4, m) = k$ . Серед них маємо графи без ізолюваних вершин з векторами степенів вигляду  $(1,1, \dots, 15)_{2m-5}, (1,1, \dots, 124)_{2m-6}, (1,1, \dots, 133)_{2m-6}, (1,1, \dots, 1, 2, 2, 3)_{2m-7}$  та  $(1,1, \dots, 1, 2, 2, 2, 2)_{2m-8}$ . Після R-перетворення цих графів при  $m > 5$  отримаємо 7 попарно неізоморфних графів з  $2m-3$  вершинами. Наступне R-перетворення дасть три графа з  $2m-2$  вершинами. На наступному кроці отримаємо один граф з вектором степенів  $(1,1, \dots, 12)_{2m-2}$ . Останнє R-перетворення дасть граф з вектором степенів  $(1,1, \dots, 1)_{2m}$ .

Таким чином, повний набір попарно неізоморфних  $(2m, m)$ -графів складається з  $k+12$  графів і це число співпадає з правою частиною співвідношення (4). Відзначимо, що при  $m=5$  має місце рівність  $T(2m, m) = T(2m, 4) + T(2m-4, m)$ .

Аналогічно доводяться співвідношення (5) та (6). Зрозуміло, що зі зростанням  $m$  збільшується й число графів без ізолюваних вершин у сукупності неізоморфних  $(2m-k, m)$ -графів. Відзначимо, що необов'язково зображувати ці графи, оскільки їх кількість не має значення. Досить аналізувати  $(2m-k+1, m)$ -графи, які отримуються у результаті першої редукції. Їх вектори степенів отримуються з векторів степенів  $(2m-k, m)$ -графів додаванням до них зліва нуля (це відповідає додаванню до графа ізолюваної вершини), а потім заміною нуля одиницею з одночасним зменшенням на 1 степінь однієї з вер-

шин. Наприклад, у разі співвідношення (5) маємо  $(2m-5, m)$ -графи без ізолюваних вершин з векторами степенів вигляду  $(1,1, \dots, 1, 6)_{2m-6}, (1,1, \dots, 1, 2, 5)_{2m-7}$ ,

$(1,1, \dots, 1, 3, 4)_{2m-7}, (1,1, \dots, 1, 2, 3, 3)_{2m-8}, (1,1, \dots, 1, 2, 2, 4)_{2m-8}, (1,1, \dots, 1, 2, 2, 2, 3)_{2m-9}$  та  $(1,1, \dots, 1, 2, 2, 2, 2, 2)_{2m-10}$ . Після першої редукції отримаємо вектори степенів вигляду  $(1,1, \dots, 1, 5)_{2m-5}, (1,1, \dots, 1, 2, 4)_{2m-6}, (1,1, \dots, 1, 3, 3)_{2m-6}, (1,1, \dots, 1, 2, 2, 3)_{2m-7}$  та  $(1,1, \dots, 1, 2, 2, 2, 2)_{2m-8}$ . Існує 18

попарно неізоморфних  $(2m-4, m)$ -графів без ізолюваних вершин з такими векторами степенів. Після другої редукції набір векторів степенів стає таким:  $(1,1, \dots, 1, 4)_{2m-4}, (1,1, \dots, 1, 2, 3)_{2m-5}, (1,1, \dots, 1, 2, 2, 2)_{2m-6}$ .

Відповідних їм графів буде 7. Після третьої редукції маємо вектори степенів  $(1,1, \dots, 1, 3)_{2m-3}$  та  $(1,1, \dots, 1, 2, 2)_{2m-4}$  і три відповідних їм попарно неізоморфних графів. Далі отримаємо  $(1,1, \dots, 1, 2)_{2m-2}$

і єдиний можливий граф. І, нарешті, остання редукція приводить до графа з вектором степенів  $(1,1, \dots, 1)_{2m}$ . Таким чином, якщо  $T(2m-5, m) = k$ , то

ліва та права частини рівності (5) набудуть значення  $k+30$ . При  $m=6$  та  $m=7$  мають місце рівності  $T(2m, m) = T(2m, 5) + T(2m-5, m) + 1$  та  $T(2m, m) = T(2m, 5) + T(2m-5, m) + 3$  відповідно. При  $m=8$  та  $m=9$  мають місце рівності  $T(2m, m) = T(2m, 6) + T(2m-6, m) + 1$  та  $T(2m, m) = T(2m, 6) + T(2m-6, m) + 3$  відповідно. В цьому можна переконатись безпосередньо, скориставшись таблицею.

**4. Обчислення деяких відсутніх у таблиці елементів**

З доведених співвідношень випливає ряд інших рекурентних співвідношень, наприклад:

$$T(2m-1, m) = T(2m-2, m) + 1, \quad m > 2 \quad (7)$$

$$T(2m-2, m) = T(2m-3, m) + 3, \quad m > 3 \quad (8)$$



$n \setminus m$	$\emptyset$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
XIX	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4612	15211	52914	193186
XX	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15214	52932	193295
XXI	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15215	52939	193337
XXII	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52942	193355
XXIII	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52943	193362
XXIV	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52944	193365
XXV	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52944	193366
XXVI	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52944	193367

Рис. 4. Новий фрагмент таблиці чисел неізоморфних  $(n, m)$ -графів

$$T(2m-2, m) = T(2m-4, m) + 10, \quad m > 5 \quad (9)$$

$$T(2m-3, m) = T(2m-5, m) + 25, \quad m > 7 \quad (10)$$

$$T(2m-3, m) = T(2m-6, m) + 67, \quad m > 9 \quad (11)$$

$$T(2m-2, m) = T(2m-6, m) + 70, \quad m > 9 \quad (12)$$

$$T(2m-2, m) = T(2m-5, m) + 28, \quad m > 7 \quad (13)$$

При  $m=11$  зі співвідношення (7) отримаємо  $T(21, 11) = T(20, 11) + 1 = 15215$ . Тоді зі співвідношення (1) знайдемо  $T(22, 11) = T(21, 11) + 1 = 15216$ . При  $m=12$  зі співвідношення (10) отримаємо  $T(21, 12) = T(19, 12) + 25 = 52914 + 25 = 52939$ , а зі співвідношення (9)  $T(22, 12) = T(20, 12) + 10 = 52932 + 10 = 52942$ . Знову зі співвідношення (7) знайдемо  $T(23, 12) = T(22, 12) + 1 = 52942 + 1 = 52943$ , а зі співвідношення (2)  $T(24, 12) = T(22, 12) + 2 = 52942 + 2 = 52944$ .

Співвідношення (12) дає можливість обчислити елемент  $T(24, 13)$ . Отримаємо  $T(24, 13) = T(20, 13) + 70 = 193295 + 70 = 193365$ . А далі з (13)  $T(24, 13) = T(21, 13) + 28$ , звідки  $T(21, 13) =$

$= 193365 - 28 = 193337$ . З (9)  $T(24, 13) = T(22, 13) + 10$ , звідки  $T(22, 13) = 193365 - 10 = 193355$ . З (8)  $T(24, 13) = T(23, 13) + 3$ . Значить,  $T(23, 13) = 193365 - 3 = 193362$ . Тепер обчислимо  $T(25, 13)$  та  $T(26, 13)$ , додамо до  $T(24, 13)$  одиницю та двійку відповідно.

На рисунку 4 зображено новий фрагмент таблиці. Таким чином, тепер відомі всі елементи стовпців з номерами до 13 включно.

Для перевірки отриманих результатів була використана відома формула Харарі для знаходження числа неізоморфних звичайних графів [1]. Обчислення елементів у рядках таблиці здійснювалось на персональному комп'ютері за допомогою спеціально створених програм. Результати обчислень за формулою Харарі та за знайденими у цій роботі рекурентними співвідношеннями виявились однаковими. Цей факт свідчить про ефективність використання властивостей таблиці та перспективність їх подальшого дослідження для знаходження можливостей заповнення таблиці.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Харари Ф., Палмер Э.М. Перечисление графов / пер. с англ. Г.П. Гаврилов. Москва : Мир, 1977. 328 с.
2. Bedratyuk L., Bedratyuk A. A new formula for the generating function of the number of simple graphs. 2016. URL: <https://arxiv.org/pdf/1512.06355.pdf>.
3. Алексеев В.Е., Захарова Д.В. Теория графов. Нижний Новгород : Нижегородский университет, 2017. 119 с.
4. Thiery N. Algebraic invariants of graphs: a study based on computer exploration. *ACM SIGSAM Bulletin*, 2000, Vol. 34, No. 3, pp. 9–20.
5. Емеличев В.А. Лекции по теории графов. Москва : Наука, 1990. 276 с.
6. A008406. The online encyclopedia of integer sequences. URL: <https://oeis.org/A008406>.

#### REFERENCES

1. Harari, F., Palmer, E.M. (1977). *Perechislenie grafov* [Enumeration of graphs]. Moscow: Mir [in Russian].
2. Bedratyuk, L., Bedratyuk, A. (2016). A new formula for the generating function of the number of simple graphs. Retrieved from: <https://arxiv.org/pdf/1512.06355.pdf>.
3. Alekssev, V.E., Zaharova, D.V. (2017). *Teoria grafov* [Theory of graphs]. Nizhny Novgorod: Nizhegorodskiy universitet [in Russian].
4. Thiery, N. (2000). Algebraic invariants of graphs: a study based on computer exploration. *ACM SIGSAM Bulletin*, Vol. 34, No. 3, pp. 9–20.
5. Emelichev, V.A. (1990). *Lekcii po teorii grafov* [Lectures in theory of graphs]. Moscow: Nauka [in Russian].
6. A008406. The online encyclopedia of integer sequences. Retrieved from: <https://oeis.org/A008406>.

**THE DETERMINATION OF THE ELASTIC CONSTANTS  
OF THE COMPOSITE MATERIAL WITH SOLID  
AND HOLLOW EQUIVALENTLY DIRECTED FIBERS**

**Stoliarova A. V.**

*Postgraduate Student at the Department of Fundamental Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
[orcid.org/0000-0003-2783-2889](https://orcid.org/0000-0003-2783-2889)  
[st\\_av991@ukr.net](mailto:st_av991@ukr.net)*

**Koval R. A.**

*Postgraduate Student at the Department of Fundamental Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
[orcid.org/0000-0002-5155-9125](https://orcid.org/0000-0002-5155-9125)  
[max21.rus01@gmail.com](mailto:max21.rus01@gmail.com)*

**Hatsenko A. V.**

*Postgraduate Student at the Department of Fundamental Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
[orcid.org/0000-0001-5972-1169](https://orcid.org/0000-0001-5972-1169)  
[gatsenkonastya1992@gmail.com](mailto:gatsenkonastya1992@gmail.com)*

**Dioba N. O.**

*Postgraduate Student at the Department of Fundamental Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
[orcid.org/0000-0002-4849-1123](https://orcid.org/0000-0002-4849-1123)  
[sno2903@ukr.net](mailto:sno2903@ukr.net)*

**Key words:** *composite material, solid fibers, hollow fibers, effective elastic constants, homogenization, transtropic material.*

The article presents approaches to determining the effective mechanical properties of a composite material reinforced with solid and hollow fibers, using the method of a representative bulk element. Matrix and fiber materials were considered transtropic. The mutual arrangement of solid and hollow fibers is periodic in the general hexagonal scheme of reinforcement. Double homogenization was used to determine the effective elastic characteristics of a composite material containing areas with two types of fibers. The entire volume of the composite is divided into a system of hexagonal areas, of which two types can be distinguished. The first is a solid fiber with its surrounding matrix, the second is a hollow fiber with its surrounding matrix. To pre-homogenize each type of inhomogeneous area, the method of a representative bulk element is used. As a result, there are homogenized areas consisting of hexagonal cells of two types, each of which is transtropic. The isotropy planes for both regions coincide. Taking into account the periodic nature of reinforcement, homogenized regions with solid fibers can be represented as a conditional fiber, and homogenized areas with hollow fibers as a conditional

matrix. We have an inhomogeneous material with a conditional transtropic matrix and fiber. The inhomogeneous material consisting of homogenized regions is re-homogenized by the method of a representative bulk element. As a result, transtropic effective elastic constants of composite material reinforced with a system of solid and hollow fibers is obtained.

Using the presented approach, the calculation of effective elastic constants of unidirectional composite material based on polyester resin reinforced with hollow and solid fiberglass was performed. The analysis of dependences for some effective elastic constants on the bulk content of the cavity in the fiber was conducted.

---

## ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНИХ СТАЛИХ КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ ІЗ СУЦІЛЬНИМИ ТА ПОРОЖНИСТИМИ ОДНАКОВОСПРЯМОВАНИМИ ВОЛОКНАМИ

**Столярова А. В.**

*аспірантка кафедри фундаментальної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
orcid.org/0000-0003-2783-2889  
st\_av991@ukr.net*

**Коваль Р. А.**

*аспірант кафедри фундаментальної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
orcid.org/0000-0002-5155-9125  
max21.rus01@gmail.com*

**Гаценко А. В.**

*аспірант кафедри фундаментальної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
orcid.org/0000-0001-5972-1169  
gatsenkonastya1992@gmail.com*

**Діоба Н. О.**

*аспірант кафедри фундаментальної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
orcid.org/0000-0002-4849-1123  
sno2903@ukr.net*

**Ключові слова:** *композиційний матеріал, суцільні волокна, порожнисті волокна, ефективні пружні сталі, гомогенізація, транструпний матеріал.*

У статті представлено підходи до визначення ефективних механічних характеристик композиційного матеріалу, армованого суцільними та порожнистими волокнами за допомогою методу представницького об'ємного елемента. Матеріали матриці та волокна вважалися транструпними. Взаємне розташування суцільних та порожнистих волокон є періодичним при загальній гексагональній схемі армування. Для визначення ефективних пружних характеристик композиційного матеріалу, що містить області з двома типами волокон, використано

подвійну гомогенізацію. Увесь об'єм композиту розділяється на систему гексагональних областей, з яких можна виділити два типи. Перший – це суцільне волокно із оточуючою його матрицею, другий – порожнисте волокно із оточуючою його матрицею. Для попередньої гомогенізації кожного типу неоднорідної області скористаємося методом представницького об'ємного елементу. В результаті маємо гомогенізовані області, що складаються із гексагональних комірок двох типів, кожна з яких є трансропною. Площини ізотропії для обох областей співпадають. Враховуючи періодичний характер армування, гомогенізовані області із суцільними волокнами можемо представити за умовне волокно, а гомогенізовані області із порожнистими волокнами – за умовну матрицю. Маємо неоднорідний матеріал з умовними трансропними матрицею та волокном. Для неоднорідного матеріалу, що складається із гомогенізованих областей, проводимо повторну гомогенізацію методом представницького об'ємного елементу. В результаті отримаємо трансропні ефективні пружні сталі композиційного матеріалу, армованого системою суцільних та порожнистих волокон.

За допомогою представленого підходу проведено розрахунок ефективних пружних сталей однаковоспрямованого композиційного матеріалу на основі поліефірної смоли, армованого порожнистими та суцільними скловолокнами. Проведено аналіз залежностей для деяких ефективних пружних сталей від об'ємного вмісту порожнини у волокні.

**Introduction.** Every year the sphere of application of composite materials becomes wider, the use of composites becomes relevant even in those industries where they have not been used before. One of the most common components for the manufacture of composites is hollow fibers. Both hollow fiberglass and reinforcing elements have found their application in the manufacture of fiberglass. The study of the mechanical characteristics of fiberglass based on hollow fibers indicates the feasibility of using such composites for products under compressive loads. Thus, M.S. Aslanova, S.L. Roginsky, V.I. Dreitzer in their works concluded that the specific strength of fiberglass with hollow fibers was almost three times higher than the reinforcement of solid fibers [1, p. 183–188]. S. Kling and T. Czigany in their publication performed a comparative analysis of the use of hollow and solid glass fibers in the design of composite materials [2].

Despite the large number of studies of the stress-strain state of fibrous composites, only some theoretical studies focus on modeling the elastic behavior of composite materials with voids in the fibers [3–7]. The mechanical properties of fiberglass can be significantly influenced by changing the cross-sectional

profile of the reinforcing fibers. Thus, R.V. Humphrey determined that the packaging of fiberglass with a cross section in the form of a hollow hexagon can result in obtaining a composite with a high fiber content at low weight [8, p. 401–413]. It is noted that the density of the composite based on hollow hexagonal fibers is twice lower than the density of ordinary fiberglass.

In some load schemes, the combined use of solid and hollow fibers may be appropriate, but the presence of both types of fibers in the composite leads to mathematical complications in determining the effective mechanical characteristics. To determine them, we use the approach described in [9], for a composite material reinforced with two types of unidirectional solid fibers.

**Methods.** Let us consider an example of such a scheme of reinforcement of a three-component composite material of solid and hollow equally directed fibers of periodic structure (Fig. 1). Let us divide the entire array of composite material by a system of hexagonal cells, as shown in Figure 1.

To determine the effective elastic constants for hexagonal cells containing hollow fibers, the formulas presented in [10] are used.

Longitudinal modulus of elasticity:

$$E_1 = E_1^* \frac{\alpha}{d^* \alpha - \gamma} (d^* f + d^* (1 - f - g)),$$

where  $f$  and  $g$  – respectively, the fiber material volume fraction and the cavity in the composite;

$E_1^*$  – longitudinal modulus of elasticity of the matrix material;

$E_2^*$  – the transverse modulus of elasticity of the matrix material;

$\nu_{12}^*$ ,  $\nu_{21}^*$ ,  $\nu_{23}^*$  – Poisson's ratios the matrix material;



$E_1^\circ$  – longitudinal modulus of elasticity of the fiber material;  
 $E_2^\circ$  – the transverse modulus of elasticity of the fiber material;  
 $\nu_{12}^\circ, \nu_{21}^\circ, \nu_{23}^\circ$  – Poisson's ratios the fiber material;

$$d^\circ = \frac{\alpha + \beta \nu_{12}^\circ}{\alpha E_1^\circ}; \quad d^* = \frac{\alpha + \beta \nu_{12}^*}{\alpha E_1^*};$$

$$\alpha = (1 - f - g) \left( (E_2^* \nu_{23}^* - E_2^\circ \nu_{23}^\circ) f - E_2^* (f + 2g) \right) - E_2^\circ (1 + f + g) f;$$

$$\beta = 2(f + g) \left( \nu_{21}^\circ E_2^* (1 - f - g) + \nu_{21}^* E_2^\circ f \right);$$

$$\gamma = 2f(f + g) \left( \nu_{21}^\circ E_2^\circ \frac{\nu_{12}^*}{E_1^*} - \nu_{21}^* E_2^* \frac{\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} \right).$$

Poisson's ratio:

$$\nu_{12} = \frac{\nu_{21}^* \nu_{12}^* d^\circ \alpha - \gamma}{\nu_{21}^* (d^\circ \alpha - \gamma)}.$$

Longitudinal shear modulus:

$$G_{12} = \frac{G_{12}^* \left( G_{12}^\circ f (1 + f + g)^2 + G_{12}^* (f + 2g) (1 - (f + g)^2) \right)}{G_{12}^\circ f (1 - (f + g)^2) + G_{12}^* (f + 2g) (1 + f + g)^2}.$$

Transverse modulus of elasticity:

based on the equality of radial displacements

$$E_2 = \frac{2\eta E_2^*}{\eta \left( 4\gamma_3 (1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + (1 + \nu_{23}^*) + \gamma_1 \right) + 2(f + g) \left( f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^* \left( (f + 2g)\gamma_2 + 2g\nu_{23}^\circ \right) \right)},$$

where

$$\gamma_1 = (1 - \nu_{23}^*) - \frac{d_0 f \nu_{21}^*}{d^* f + d^\circ (1 - f - g)};$$

$$\gamma_2 = (1 - \nu_{23}^\circ) - \frac{d^\circ (f + g - 1) \nu_{21}^\circ}{d^* f + d^\circ (1 - f - g)};$$

$$\gamma_3 = \frac{\left( (f + g)(3g(f + 2g) - 2(f + 3)) - fg \right) \chi_1 + f^2 \chi_2 + \left( (f + g)^2 + g(f + 2g) \right) \chi_3}{3\chi_3 (g - 1)(f + 2g + 1)(f + g - 1)};$$

$$\gamma_4 = \frac{\left( (g - 1)(4(f + g)^2 + g(f + 2g)) - f^2 g \right) \chi_1 - f^2 \chi_2 - \left( (f + g)^2 + g(f + 2g) \right) \chi_3}{3\chi_3 (g - 1)(f + 2g + 1)(f + g - 1)};$$

$$d^\circ = \frac{\nu_{21}^\circ}{E_2^\circ} \left( \nu_{21}^\circ \left( \frac{\tau}{\eta} f + 1 \right) - \frac{2\nu_{21}^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ} - 2\nu_{21}^* E_2^\circ f \frac{f + g}{\eta} \right) - \frac{1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)};$$

$$d^* = \frac{\nu_{21}^*}{E_2^*} \left( \nu_{21}^* \left( \frac{\tau}{\eta} f + 1 \right) - \frac{2\nu_{21}^*}{1 - \nu_{23}^*} - 2\nu_{21}^* E_2^\circ f \frac{f + g}{\eta} \right) - \frac{1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^* \nu_{12}^*}{E_1^* (1 - \nu_{23}^*)};$$

$$d_0 = \left( \frac{\nu_{21}^\circ}{E_2^\circ} \frac{\tau}{\eta} - 2\nu_{21}^* \frac{f + g}{\eta} \right) \left( \frac{E_2^\circ}{E_2^*} f (1 - \nu_{23}^*) - f (1 - \nu_{23}^\circ) - 2g \right) - \frac{2\nu_{21}^*}{E_2^*} + \frac{\nu_{21}^\circ}{E_2^\circ} (1 + \nu_{23}^\circ) + \frac{\nu_{21}^*}{E_2^*} (1 - \nu_{23}^*);$$

$$\begin{aligned}
\eta &= E_2^*(2g + f(1 - v_{23}^\circ))(f + g - 1) - fE_2^\circ((f + g)(1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*)); \\
\tau &= E_2^*(1 + v_{23}^\circ)(f + g - 1) + E_2^\circ((f + g)(1 - v_{23}^*) + (1 + v_{23}^*)); \\
\chi_1 &= d_{13}t_4 - d_{23}t_3; \quad \chi_2 = d_{23}t_2 - d_{13}t_1; \quad \chi_3 = t_1t_3 - t_2t_4; \\
d_{11} &= k_{11}(f^2 + 3(f + g)(g - 1)) - 3k_{12}(f + g)(g - 1)(f + 2g + 1); \\
d_{12} &= k_{13}((f + g)^2 + (f + g)(1 - 3g) + 1) - 3k_{14}(f + g)(g - 1)(f + 2g + 1); \\
d_{13} &= k_{13}E_2^*(f + g - 1)((f + g)^2 + f + g + 1) + \\
&\quad + E_2^\circ f(k_{11}(f^2 + 3g(f + g)) - 3(1 + v_{23}^*)(f + g)^2(f + g - 1)(g - 1)(f + 2g + 1)); \\
d_{21} &= k_{21}(f^2 + 3(f + g)(g - 1)) + 3k_{22}(f + g)(g - 1)(f + 2g + 1); \\
d_{22} &= k_{23}((f + g)^2 + (f + g)(1 - 3g) + 1) - 3k_{24}(f + g)(g - 1)(f + 2g + 1); \\
d_{23} &= k_{23}E_2^*(f + g - 1)((f + g)^2 + f + g + 1) + \\
&\quad + E_2^\circ f(k_{21}(f^2 + 3g(f + g)) - 3(1 + v_{23}^*)(f + g)^2(f + g - 1)(g - 1)(f + 2g + 1)); \\
k_{11} &= 4(f + g)^3(v_{23}^* + v_{21}^*v_{12}^*) - (1 + v_{23}^*)(1 + 3(f + g)^2); \\
k_{12} &= 4(f + g)(1 - v_{21}^*v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*)((f + g)^2 - 1); \\
k_{13} &= (3g(f + g)^2 + g^3)(1 + v_{23}^\circ) - 4(f + g)^3(v_{23}^\circ + v_{21}^\circ v_{12}^\circ); \\
k_{14} &= ((f + g)^2 - g^2)(1 + v_{23}^\circ) + 4g(f + g)(1 - v_{21}^\circ v_{12}^\circ); \\
k_{21} &= 2(f + g)^3(3 + v_{23}^* - 2v_{21}^*v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*)(1 - 3(f + g)^2); \\
k_{22} &= 2(f + g)(v_{23}^* + 2v_{21}^*v_{12}^* - 1) - (1 + v_{23}^*)((f + g)^2 + 1); \\
k_{23} &= (3g(f + g)^2 - g^3)(1 + v_{23}^\circ) - 2(f + g)^3(3 + v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ); \\
k_{24} &= ((f + g)^2 + g^2)(1 + v_{23}^\circ) - 2g(f + g)(v_{23}^\circ + 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ - 1); \\
t_1 &= d_{21}E_2^\circ f + k_{23}E_2^*(f + g - 1)^3; \quad t_2 = d_{11}E_2^\circ f + k_{13}E_2^*(f + g - 1)^3; \\
t_3 &= k_{11}E_2^\circ f^3 + d_{12}E_2^*(f + g - 1); \quad t_4 = k_{21}E_2^\circ f^3 + d_{22}E_2^*(f + g - 1);
\end{aligned}$$

based on the equality of circumferential movements

$$E_2 = \frac{2\eta E_2^*}{\eta(4\gamma_4(1 - v_{21}^*v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*) + \gamma_1) + 2(f + g)(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^*((f + 2g)\gamma_2 + 2gv_{23}^\circ))}.$$

Poisson's ratio:

based on the equality of radial displacements

$$v_{23} = \frac{\eta(4\gamma_3(1 - v_{21}^*v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*) - \gamma_1) - 2(f + g)(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^*((f + 2g)\gamma_2 + 2gv_{23}^\circ))}{\eta(4\gamma_3(1 - v_{21}^*v_{12}^*) + (1 + v_{23}^*) + \gamma_1) + 2(f + g)(f\gamma_1 E_2^\circ - E_2^*((f + 2g)\gamma_2 + 2gv_{23}^\circ))},$$

based on the equality of circumferential movements

$$v_{23} = \frac{\eta(4\gamma_4(1-v_{21}^*v_{12}^*)+(1+v_{23}^*)-\gamma_1)-2(f+g)(f\gamma_1E_2^\circ-E_2^*((f+2g)\gamma_2+2gv_{23}^\circ))}{\eta(4\gamma_4(1-v_{21}^*v_{12}^*)+(1+v_{23}^*)+\gamma_1)+2(f+g)(f\gamma_1E_2^\circ-E_2^*((f+2g)\gamma_2+2gv_{23}^\circ))}.$$

These formulas are obtained for a composite material with a transtropic matrix and a hollow fiber, if the components are isotropic, then in these formulas it is necessary to equate the corresponding elastic characteristics of the matrix and fiber materials. For hexagonal cells with solid fibers, one can use the same formulas where  $g = 0$ .

With this partition, the matrix material in any hexagonal cell will occupy the same volume if the diameter of the fibers of both types is the same, and the volume occupied by the matrix material will be different if the diameter of the fibers of both types is different.

We have two types of hexagonal cells – with a hollow fiber (the ring is marked by an inclined hatching), and with a solid fiber (the circle is marked by an inclined hatching). Next, we approximate a hexagonal cell with a circle equal to the area of this cell. Applying the formulas of dependence of constants on the elastic characteristics of the transtropic matrix, fiber and bulk particles of the fiber and cavity material in the composite material, we determine the elastic constants for the first area of the composite and, taking in the formulas  $g = 0$ , determine the elastic constants for the second area of the composite. As a result, we obtain a two-component fibrous material with calculated elastic constants of transversely isotropic matrix and fibers (Fig. 1).

For the obtained composite material, we determine the elastic constants using the method described above. Then the section of this material is divided into hexagonal cells, and we apply to the elementary hexagonal cell the procedure for determining the elastic constants, according to the previously defined elastic constants of

the matrix and fibers. The volume fraction of a fiber is defined as the ratio of the area of the circle occupying the fiber to the area of the hexagonal cell. The obtained elastic constants of the composite material will determine the elastic constants of the three-component composite material with two types of fibers.

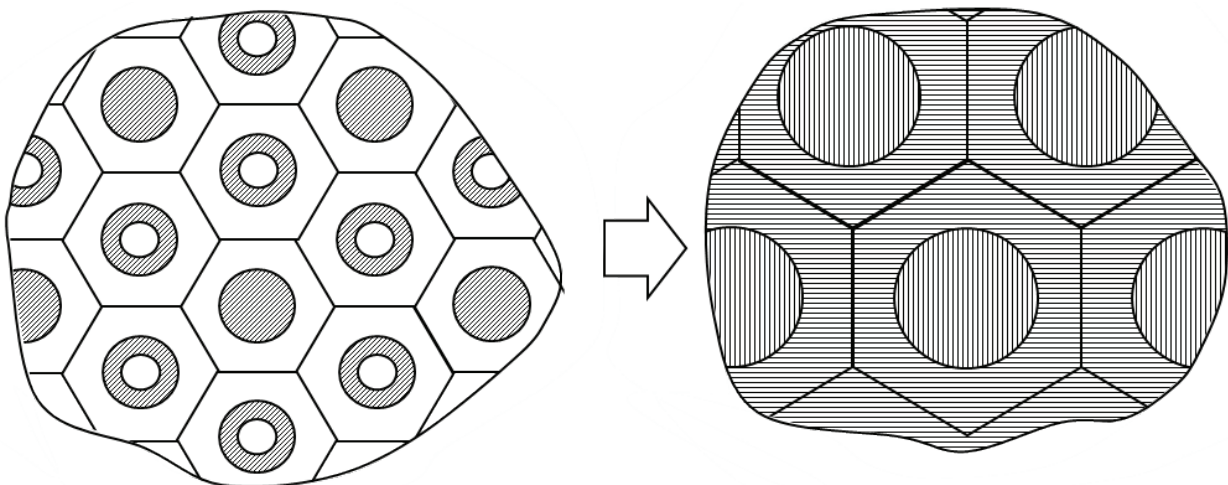
If in the original three-component composite material the volume fraction of the material of the hollow fiber of the grade  $f_1$  with the cavity  $g$ , and the solid fiber –  $f_2$ , the volume fraction of the matrix material will be  $1 - f_1 - f_2 - g$ . Then, according to the above approach to the representation of the matrix and fiber, the volume fraction of the new matrix will be

$(1 - f_1 - f_2 - g) \frac{f_1}{f_1 + f_2 + g} + f_1$ . Thus, the volume fraction of the new matrix in the two-component fibrous material will be equal to  $\frac{f_1}{f_1 + f_2 + g}$ .

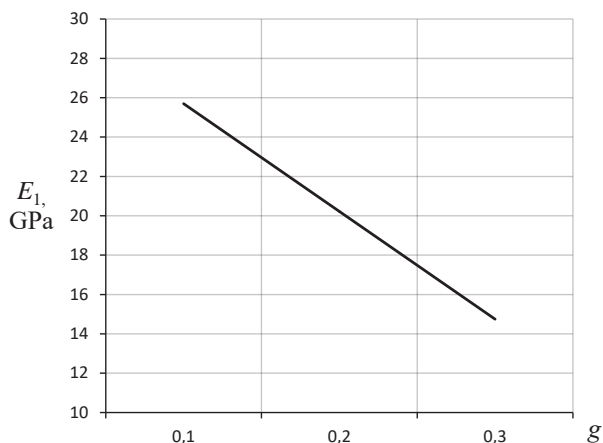
Similarly, let us determine the volume fraction of new fiber in a two-component fibrous material. The volume fraction of the fiber will be the value, which is equal to  $(1 - f_1 - f_2 - g) \frac{f_2}{f_1 + f_2 + g} + f_2$ . Thus, the

volume fraction of fiber in the composite material will be the value  $\frac{f_2}{f_1 + f_2 + g}$ .

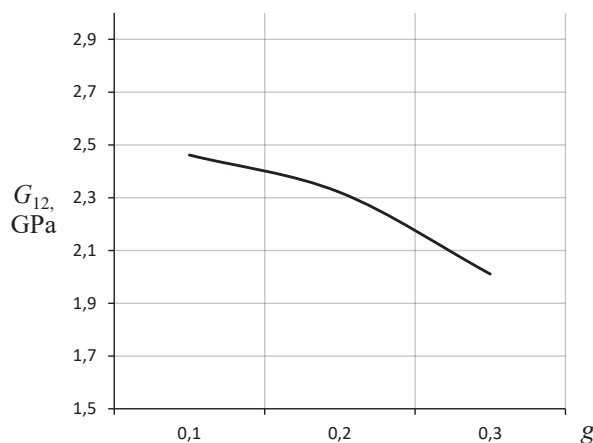
However, it should be taken into account that the obtained ratios for calculating the elastic properties of the composite material operate only with the volume fraction of fibers and do not take into account the



**Fig. 1. Representation of a three-component composite material**



**Fig. 2. Effective longitudinal modulus of elasticity of a composite material reinforced with solid and hollow fibers**



**Fig. 3. Effective shear modulus of a composite material reinforced with solid and hollow fibers**

diameter of the fiber and the structure of the stacking. Therefore, the above technique can be applied to other schemes of reinforcement, it should only be taken into account that the more precisely the circle approximates the boundary of the matrix material in the model, the more accurate the results are.

**Numerical calculation.** Let us consider a unidirectional UD GFRP composite based on polyester resin (Polimal 109), reinforced with fiberglass (E-glass). The elastic characteristics of the components [11]: for fiber we have  $E^\circ = 73$  GPa,  $\nu^\circ = 0,22$ ,  $G^\circ = 29,9$  GPa; for matrix  $E^* = 3,24$  GPa,  $\nu^* = 0,385$ . Suppose that the scheme of reinforcement is the same as Fig. 1. Volumetric content of hollow fiber  $f + g = 0,4$ .

Figures 2 and 3 show the dependence of the effective longitudinal modulus of elasticity and shear modulus on the volumetric content of the cavity.

**Conclusions.** The method of double homogenization for a composite material periodically reinforced with two types of fibers – solid and hollow, is proposed. Presented this technique for calculating the effective elastic characteristics of the composite material on the example of a composite with isotropic properties of the components. It can be noted that the increase in the volume content of the cavity leads to a decrease in the values of the effective characteristics, and for an effective longitudinal modulus of elasticity, this dependence is linear, and for an effective shear modulus it is nonlinear.

## BIBLIOGRAPHY

1. Инженерная механика полимеров и применение пластмасс в промышленности / отв. ред. Г.Л. Зодилова. Тбилиси : Мецниереба, 1969. 273 с.
2. Kling S., Czigany T. A comparative analysis of hollow and solid glass fibers. *Textile Research Journal*. 2013. Vol. 83 (16). P. 1764–1772. DOI: 10.1177/0040517513478455.
3. Bardella L., Genna F. On the elastic behavior of syntactic foams. *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38 (40–41). P. 7235–7260. DOI: 10.1016/s0020-7683(00)00228-6.
4. Marur P.R. Effective elastic moduli of syntactic foams. *Materials Letters*. 2005. Vol. 59 (14–15). P. 1954–1957. DOI: 10.1016/j.matlet.2005.02.034.
5. Hashin Z., Rosen B.W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *Journal of Applied Mechanics*. 1964. Vol. 31 (2). P. 223–232. DOI: 10.1115/1.3629590.
6. Зайцев А.В., Соколкин Ю.В., Фукалов А.А. Эффективные модули объемного сжатия при плоской деформации двухфазных однонаправленно армированных композитов с анизотропными полыми и сплошными волокнами. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета*. 2011. № 4. С. 37–48.
7. Bayat M., Aghdam M.M. A micromechanics based analysis of hollow fiber composites using DQEM. *Composites. Part B: Engineering*. 2012. Vol. 43, Issue 8. P. 2921–2929. DOI: 10.1016/j.compositesb.2012.06.021.
8. Современные композиционные материалы / перев. с англ. под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. Москва : Мир, 1970. 672 с.



9. Гребенюк С.М., Гоменюк С.І., Клименко М.І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 350 с.
10. Столярова А.В. Эффективные механические характеристики композиционных материалов из трансропными порожнистыми волокнами : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2021. 104 с.
11. Klasztorny M., Konderla P., Piekarski R. An exact stiffness theory for unidirectional xFRP composites. *Mechanics of Composite Materials*. 2009. Vol. 45 (1). P. 77–104. DOI: 10.1007/s11029-009-9064-y.

#### REFERENCES

1. Zodelova, G.L. (Ed.). (1969). *Inzhenernaya mekhanika polimerov i primeneniye plastmass v promy'shlenosti* [Engineering mechanics of polymers and the use of plastics in industry]. Tbilisi: Metsniereba [in Russian].
2. Kling, S., Czigany, T. (2013). A comparative analysis of hollow and solid glass fibers. *Textile Research Journal*, 83(16), 1764–1772. DOI: 10.1177/0040517513478455 [in English].
3. Bardella, L., Genna, F. (2001). On the elastic behavior of syntactic foams. *International Journal of Solids and Structures*, 38(40–41), 7235–7260. DOI: 10.1016/s0020-7683(00)00228-6 [in English].
4. Marur, P.R. (2005). Effective elastic moduli of syntactic foams. *Materials Letters*, 59(14–15), 1954–1957. DOI: 10.1016/j.matlet.2005.02.034 [in English].
5. Hashin, Z., Rosen, B.W. (1964). The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *Journal of Applied Mechanics*, 31(2), 223–232. DOI: 10.1115/1.3629590 [in English].
6. Zaitsev, A.V., Sokolkin, Yu.V., Fukalov, A.A. (2011). E'ffektivny'e moduli ob'emnogo szhatiya pri ploskoj deformaczii dvukhfazny'kh odnonapravlenno armirovanny'kh kompozitov s anizotropny'mi poly'mi i sploshny'mi voloknami [Effective bulk moduli under plain strain to two-phase unidirectional composites reinforced by anisotropic hollow and solid fibers]. *Vestnik Permskogo naczional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta*, 4, 37–48 [in Russian].
7. Bayat, M., Aghdam, M.M. (2012). A micromechanics based analysis of hollow fiber composites using DQEM. *Composites. Part B: Engineering*, 43(8), 2921–2929. DOI: 10.1016/j.compositesb.2012.06.021 [in English].
8. Brautman, L., Krock, R. (Eds). (1970). *Sovremenny'e kompozicionny'e materialy' / perev. s angl.* [Modern composite materials]. Moscow: Mir [in Russian].
9. Grebenyuk, S.M., Gomenyuk, S.I., Klimenko, M.I. (2019). *Napruzhenno-deformovaniy stan prostоровikh konstrukcij na osnovi gomogenizaczii voloknistikh kompoziti'v: monografi'ya* [Stress-strain state of the spatial structures based on homogenization of fibrous composites: monograph]. Kherson: Vydavnychyj dim "Gheljvetyka" [in Ukrainian].
10. Stoliarova, A.V. (2021). *Efektivni' mekhanichni' kharakteristiki kompoziczi'jnikh materi'ali'v i'z transtropnimi porozhnistimi voloknami: monografi'ya* [Effective mechanical characteristics of composite materials with transtropic hollow fibers: monograph]. Kherson: Vydavnychyj dim "Gheljvetyka" [in Ukrainian].
11. Klasztorny, M., Konderla, P., Piekarski, R. (2009). An exact stiffness theory for unidirectional xFRP composites. *Mechanics of Composite Materials*, 45(1), 77–104. DOI: 10.1007/s11029-009-9064-y [in English].

УДК 539.3  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-08>

## КОНТАКТ ІЗ ЧАСТКОВИМ ПРОКОВЗУВАННЯМ МІЖ ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ І КРУГОВИМ ШТАМПОМ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНОГО І ДОТИЧНОГО НАВАНТАЖЕНЬ

**Стреляєв Ю. М.**

*кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри фундаментальної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-4400-7824](https://orcid.org/0000-0002-4400-7824)  
[strelkiny@gmail.com](mailto:strelkiny@gmail.com)*

**Ключові слова:** *контактна задача, плоский штамп, дотичне навантаження, часткове проковзування, квазістатична задача, інтегральне рівняння, числовий розв'язок.*

У статті представлено новий підхід до розв'язання квазістатичної просторової контактної задачі про фрикційну взаємодію жорсткого циліндричного штампа із плоскою основою та пружного півпростору, за умови послідовної дії на штамп монотонно зростаючих нормального та дотичного навантажень. Для врахування тертя ми використовували закон Кулона в класичній неспрошеній формі. Зони зчеплення і проковзування вважали заздалегідь невідомими і такими, що потрібно знайти. Процес навантажування моделювався скінченним числом станів рівноваги – кроків навантажування. Контактну задачу зведено до послідовного розв'язання однотипних систем нелінійних граничних інтегральних рівнянь на кожному кроці дискретного процесу навантажування. Отримані інтегральні рівняння характеризуються тим, що їхній вигляд не залежить від конфігурації зон зчеплення і проковзування. Для складання таких рівнянь необхідно лише вказати канонічну обмежену плоску область, яка містить у собі невідомі ділянки контакту на усіх етапах процесу навантажування тіл. Для отримання наближених розв'язків цих систем виконано їх дискретизацію. Побудовано збіжні ітераційні процеси для числового розв'язання отриманих в результаті цієї дискретизації систем нелінійних скалярних рівнянь. За допомогою числових розрахунків, виконаних при різних значеннях дотичного переміщення штампа, дослідили процес зміни розподілів діючих на його основу питомих контактних зусиль. Також досліджено відносні переміщення контактуючих поверхонь та еволюцію форм і розмірів зон зчеплення і проковзування при поступовому збільшенні дотичного навантажування. Встановили, що з появою дотичної сили зона зчеплення втрачає симетрію і зміщується до переднього, відносно напрямку руху, краю штампа. При збільшенні зовнішнього дотичного зусилля площа зони зчеплення зменшується і стає нульовою за умови початку повного проковзування штампа по поверхні півпростору. Найбільші значення питомих дотичних контактних зусиль та відносних переміщень контактуючих поверхонь досягаються біля заднього, відносно напрямку руху, краю штампа.

## PARTIAL SLIP CONTACT BETWEEN ELASTIC HALF-SPACE AND CIRCULAR PUNCH UNDER NORMAL AND TANGENTIAL LOADS

**Streliaiev Yu. M.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Associate Professor at the Department of Fundamental Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-4400-7824  
strelkiny@gmail.com*

**Key words:** *contact problem, flat punch, tangential loading, partial slip, quasi-static problem, integral equation, numerical solution.*

The article presents a new approach to solving the quasi-static spatial contact problem of interaction with friction between a rigid cylindrical punch with a flat base and an elastic half-space when monotonically increasing normal and tangential loads act on the punch sequentially. To account for friction, we used Coulomb's law in the classical form. We considered the stick and slip zones to be unknown in advance, which must be obtained. We simulated the loading process with a finite number of equilibrium states – loading steps. The contact problem is reduced to the sequential solution of similar systems of nonlinear boundary integral equations at each step of the discrete loading process. The resulting integral equations are characterized by the fact that their form does not depend on the configurations of the stick and slip zones. To compose such equations, it is only necessary to specify a canonical bounded flat region, which includes unknown areas of adhesion and slippage at all stages of loading the bodies. To obtain approximate solutions of these systems, they are discretized. Converging iterative processes are constructed for the numerical solution of the systems of nonlinear scalar equations obtained as a result of this discretization. Using numerical calculations performed for various values of the tangential displacement of the punch, we investigated the process of changing the distributions of contact tractions acting on its base. We also investigated the relative displacements of the contact surfaces and the evolution of the shapes and sizes of the stick and slip zones when the shear load gradually increases. We found that the stick zone loses symmetry and shifts towards the front (in the direction of the movement) edge of the punch when the tangential force begins to act. With an increase in the external tangential force, the area of the stick zone decreases and becomes zero when the punch begins to slide along the boundary of the elastic half-space. The maximum values of tangential contact stresses and relative displacements of the contact surfaces are achieved at the back edge of the punch.

**Вступ.** Задача про контактну взаємодію пружних тіл є важливою задачею сучасної механіки і має широке технічне застосування в машинобудуванні, будівельній механіці та інших галузях. Актуальність цієї задачі зумовлена питаннями міцності і зносостійкості різних механічних систем і конструкцій. Одним із факторів, що впливає на напруження у взаємодіючих елементах таких систем, є тертя між контактуючими поверхнями цих елементів. При розв'язанні таких задач поверхня контакту і виникаючі на ній зони зчеплення і проковзування заздалегідь невідомі і можуть мати складну непрогнозовану форму. Ці обставини істотно обмежують можливості аналітичних методів і спонукають використовувати числові.

**Аналіз стану проблеми.** Дослідження часткового проковзування з тертям були розпочаті в роботах [1; 2] і активно тривають по теперішній час. Огляди таких досліджень наведено в численних статтях [3–7] і книгах [8–13]. Особлива увага приділялась вивченню контактних задач для жорстких штампів з плоскою основою. Уперше контактна задача про вдавлювання прямокутного штампа в пружну півплощину при невідомій межі областей зчеплення і проковзування сформульована Л.О. Галінім [14]. Оскільки Галіну не вдалося знайти точний розв'язок, ця задача та її аналоги розглядалися багатьма дослідниками. Огляд деяких аналітичних підходів до розв'язання задачі Галіна наве-

дено в роботі [15]. Осесиметричний випадок контакту за умови повного зчеплення вивчений в роботах [16–19]. Нормальний контакт кругового штампа з пружним півпростором при наявності зчеплення і проковзування при монотонному і немонотонному навантажуваннях досліджено в роботах [13; 20–24]. Для випадку коли на штамп крім нормальної сили діє зсувна, за умови повного проковзування, В. І. Моссаковським в роботі [19] отримано наближений аналітичний розв’язок. Дотичний контакт плоского штампу і пружного півпростору за наявності зчеплення і проковзування вивчено мало.

**Мета і завдання дослідження.** Метою статті є дослідження часткового проковзування з тертям між контактуючими поверхнями пружного півпростору і жорсткого циліндричного штампа з плоскою основою, що виникає в результаті послідовно діючих на штамп нормального і дотичного навантажень. Для реалізації цієї мети необхідно знайти розподіли питомих контактних зусиль, відносні переміщення контактуючих поверхонь, конфігурації областей зчеплення і проковзування та проаналізувати еволюцію цих характеристик контакту в процесі зростання дотичного навантажування штампа.

**Виклад основного матеріалу.**

### 1. Система інтегральних рівнянь контактної задачі

Розглянемо квазістатичну просторову контактну задачу про взаємодію двох лінійно-пружних тіл при наявності кулонівського тертя [3] між ними. У разі, коли одне з тіл є абсолютно жорстким, вважатимемо його умовно пружним з нескінченним модулем Юнга. Вважатимемо також, що тіла допускають апроксимацію пружними півпросторами. Розглядатимемо процес навантажування як скінченне число  $l$  послідовних станів рівноваги (кроків навантажування). Як показано в роботі [25], на кожному  $i$ -му кроці навантажування задача зводиться до розв’язання системи нелінійних інтегральних рівнянь такого вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) = h \left( p_{1i}(s) - \tilde{E} \left( \sum_{j=1}^3 A(p_{ji})_s + \delta_0(s) + \Delta_{1i} \right) \right); \\ p_{2i}(s) = q \left( p_{2i}(s) - \tilde{E} \left( \sum_{j=1}^3 A(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s) \right) \right); \\ p_{3i}(s) - \tilde{E} \left( \sum_{j=1}^3 A(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s) \right), \mu p_{1i-1}(s); \\ p_{3i}(s) = q \left( p_{3i}(s) - \tilde{E} \left( \sum_{j=1}^3 A(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s) \right) \right); \\ p_{2i}(s) - \tilde{E} \left( \sum_{j=1}^3 A(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s) \right), \mu p_{1i-1}(s); \end{array} \right. \quad (1)$$

де  $i = \overline{1, l}$ ;  $\Omega$  – обмежена плоска область, яка містить невідому ділянку контакту і розташована у загальній для тіл дотичній площині  $\Pi$ ;  $s$  – довільна точка області  $\Omega$ ;  $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$  – невідомі функції, що задають розподіли в області  $\Omega$  нормальної і дотичних компонент питомого контактного навантаження на  $i$ -му кроці;  $\Delta_{1i}(s), \Delta_{2i}(s), \Delta_{3i}(s)$  – задані функції, що визначають умови навантажування тіл;  $\delta_0(s)$  – функція, що задає початковий зазор між тілами;  $\tilde{E}$  – довільне додатне число;  $\mu > 0$  – коефіцієнт тертя.

Оператори впливу поверхневих напружень на поверхневі пружні переміщення  $A_{kj}$ , що входять в (1), задають співвідношеннями

$$A_{kj}(x)_s = \int_{\Omega} K_{kj}(s, s') \cdot x(s') ds', \quad (k, j = \overline{1, 3}). \quad (2)$$

Ядра цих операторів  $K_{kj}(s, s')$  визначають з розв’язків Буссінеска-Черруті [8].

Функції  $\tilde{\Delta}_{2i}(s), \tilde{\Delta}_{3i}(s)$ , що входять в (1), визначають з наступних співвідношень [25]:

$$\tilde{\Delta}_{2i}(s) = \Delta_{2i}(s) - \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{2i-1}(s), \quad (3)$$

$$\tilde{\Delta}_{3i}(s) = \Delta_{3i}(s) - \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{3i-1}(s). \quad (4)$$

Функції  $h$  і  $q$ , що входять в (1), мають такий вигляд:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0; \\ 0, & \text{якщо } x < 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases} \quad (6)$$

Знаходження аналітичного розв’язку системи (1) є складним, тому для розв’язання цієї системи доцільно застосовувати числові методи, засновані на дискретизації інтегральних рівнянь з подальшим застосуванням ітераційних методів.

### 2. Метод числового розв’язання системи (1)

Задамо область  $\Omega$  у вигляді відкритого квадрата зі сторонами, паралельними осям декартової системи координат  $xOy$ , яку введено на площині  $\Pi$ . Розіб’ємо цю область на  $n^2$  квадратних рівних областей  $\omega_1^n, \omega_2^n, \dots, \omega_{n^2}^n$ , орієнтованих подібно  $\Omega$ . Вважаючи, що невідомі функції  $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$  приймають на кожному граничному елементі  $\omega_k^n$  сталі значення  $x_{3k-2i}, x_{3k-1i}, x_{3ki}$ , зведемо знаходження наближеного розв’язку системи (1) до розв’язання на кожному  $i$ -му кроці навантажування системи  $3n^2$  нелінійних скалярних рівнянь:



$$\left\{ \begin{aligned} x_{3k-2i} &= h \left( x_{3k-2i} - \tilde{E} \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-2j} \cdot x_{ji} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ x_{3k-1i} &= q \left( x_{3k-1i} - \tilde{E} \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} \cdot x_{ji} - b_{3k-1i} \right), x_{3ki} - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{E} \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} \cdot x_{ji} - b_{3ki} \right), \mu \cdot x_{3k-2i-1} \right); \\ x_{3ki} &= q \left( x_{3ki} - \tilde{E} \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} \cdot x_{ji} - b_{3ki} \right), x_{3k-1i} - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{E} \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} \cdot x_{ji} - b_{3k-1i} \right), \mu \cdot x_{3k-2i-1} \right); \end{aligned} \right. \quad (7)$$

У системі (7) числові параметри  $a_{kj}$  є елементами матриці податливості взаємодіючих тіл, а  $b_{ki}$  визначають умови навантаження взаємодіючих тіл на  $i$ -му кроці навантажування [25; 26].

Наближений розв'язок системи (7) при кожному фіксованому  $i$  шукатимемо за допомогою методу простої ітерації, використовуючи наступний ітераційний процес:

$$\left\{ \begin{aligned} &(x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3n^2i}^{(0)}) \in R^{3n^2}; \\ x_{3k-2i}^{(m+1)} &= h \left( x_{3k-2i}^{(m)} - \tilde{E} \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-2j} \cdot x_{ji}^{(m)} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ x_{3k-1i}^{(m+1)} &= q \left( x_{3k-1i}^{(m)} - \tilde{E} \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} \cdot x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), x_{3ki}^{(m)} - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{E} \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} \cdot x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), \mu \cdot x_{3k-2i-1} \right); \\ x_{3ki}^{(m+1)} &= q \left( x_{3ki}^{(m)} - \tilde{E} \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} \cdot x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), x_{3k-1i}^{(m)} - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{E} \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} \cdot x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), \mu \cdot x_{3k-2i-1} \right); \end{aligned} \right. \quad (8)$$

У роботі [27], за допомогою принципу стискаючих відображень, доведено, що ітераційний процес (8) збігається на кожному  $i$ -му кроці навантажування при будь-якому виборі початкового наближення  $(x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3n^2i}^{(0)}) \in R^{3n^2}$  за умови

$$\tilde{E} < \left( \max_{1 \leq i \leq 3n^2} \sum_{j=1}^{3n^2} |a_{ij}| \right)^{-1}.$$

При послідовному розв'язанні серії систем (7) за допомогою ітераційного процесу (8) обиратимемо наближений розв'язок системи (7), отриманий на  $(i-1)$ -му кроці навантажування, за початкове наближення на  $i$ -му кроці. При  $i=1$  будемо вважати вектор початкового наближення нульовим.

### 3. Числові результати

Запропонований підхід застосували до розв'язання контактної задачі про взаємодію жорсткого циліндричного штамп з плоскою круговою основою і пружного півпростору при послідовній дії на штамп нормального і дотичного навантажень. Для розрахунків використовували такі вихідні дані: радіус основи штамп  $R=0,005$  м; для пружного півпростору обрали коефіцієнт Пуассона  $\nu=0,3$  і модуль Юнга  $E=210000$  МПа; коефіцієнт тертя  $\mu=0,25$ .

Декартова система координат  $Oxyz$  вводилась так, щоб пружний півпростір визначався нерівністю  $z \leq 0$ , а початок координат співпадав з центром основи штамп, яка в ненавантаженому стані належить площині  $z=0$  (рис. 1).

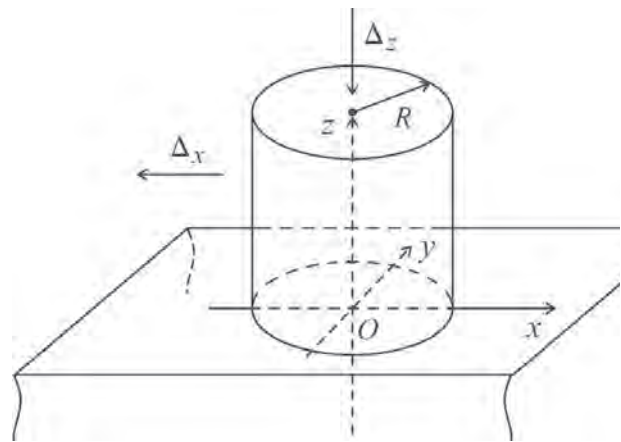


Рис. 1. Схема контакту

Процес навантажування здійснювався за  $2l$  кроків у відповідності з наступним законом зміни нормального  $\Delta_{li}$  і дотичних  $\Delta_{2i}, \Delta_{3i}$  переміщень штамп у напрямках осей  $Ozi, Ox, Oy$  відповідно:

$$\Delta_{li} = \begin{cases} \frac{-\Delta_z \cdot i}{l}, & \text{якщо } 1 \leq i \leq l; \\ -\Delta_z, & \text{якщо } l+1 \leq i \leq c; \end{cases}$$

$$\Delta_{2i} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 1 \leq i \leq l; \\ \frac{-\Delta_x \cdot (i-l)}{l}, & \text{якщо } l+1 \leq i \leq 2l; \end{cases} \quad (9)$$

$$\Delta_{3i} = 0, 1 \leq i \leq 2l.$$

Тут  $\Delta_z$  і  $\Delta_x$  – максимальні значення абсолютних величин кінцевих зсувів штамп в напрямках осей  $Oz$  і  $Ox$ . Така історія навантажування відповідає початковому монотонному вдавлюванню штамп в півпростір на величину заглиблення  $\Delta_z$  з подальшим його поступово зростаючим дотичним зсувом на  $\Delta_x$  при фіксованому значенні  $\Delta_z$ .

Для числових розрахунків використовували поверхневу сітку з  $81 \times 81 = 6561$  квадратних граничних елементів. Значення  $l$  в процесі навантажування (9) обирали рівним 20. Нижче наведені

результати, отримані на кожному з двох етапів навантаження.

**3.1. Нормальне навантаження.** Для абсолютної величини нормального зміщення штампа  $\Delta_z$  обирали значення  $4 \cdot 10^{-5}$  м. На рис. 2 подано отримані на останньому кроці першого етапу навантаження ( $i=1$  в формулах (9)) розподіли нормальних і дотичних контактних зусиль, що діють на основу штампа уздовж осі  $Ox$ .

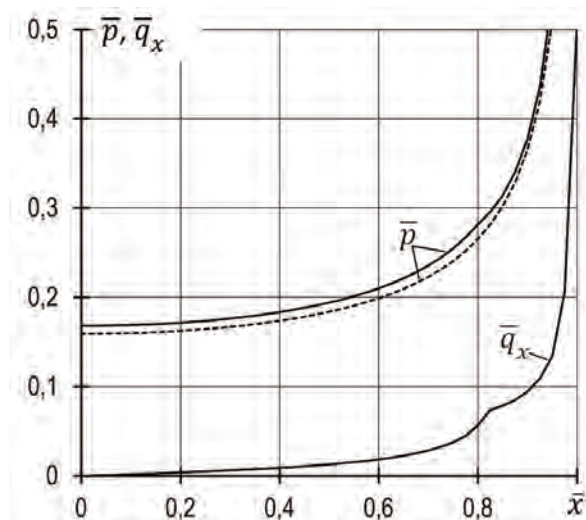


Рис. 2. Розподіли питомих контактних зусиль

Тут  $\bar{x} = x/R$  – безрозмірна координата;  $\bar{p} = \frac{R^2}{P} \cdot p_{1i}(\bar{x}, 0)$ ,  $\bar{q}_x = \frac{R^2}{P} \cdot p_{2i}(\bar{x}, 0)$  – безрозмірні нормальні і дотичні питомі контактні зусилля. Пунктирна лінія відповідає відомому розподілу контактного тиску  $\bar{p} = \frac{1}{2\pi} (1 - (\bar{x})^2)^{\frac{1}{2}}$  за відсутності тертя. Значення абсолютної величини нормальної сили  $P = \int_{\Omega} p(s) ds$ , що відповідає переміщенню штампа  $\Delta_z$ , складо приблизно 94кН. Отримали відносний розмір зчеплення  $R_1/R \approx 0,8196$ , нормалізовану осадку штампа  $\bar{\delta} = \left( \frac{ER}{P(1+\nu)} \right) \cdot \Delta_z \approx 0,3427$ .

**3.2. Дотичне навантаження.** Для дослідження зміни параметрів контакту, за монотонного зростання дотичного навантаження при сталому значенні безрозмірного нормального зміщення штампа  $\bar{\Delta}_z = \Delta_z/R = 0,008$ , дотичному зміщенню  $\bar{\Delta}_x = \Delta_x/R$  надавали послідовно зростаючі значення в діапазоні від 0 до 0,008. На рис. 3 подано залежності від  $\bar{\Delta}_x$  безрозмірних нормальної сили  $P^* = P/(ER^2)$  та дотичної  $Q^* = Q/(ER^2)$ .

Розподіли діючих на штамп уздовж осі  $Ox$  питомих дотичних зусиль  $\bar{q}_x = \frac{R^2}{P} \cdot p_{22i}(\bar{x}, 0)$

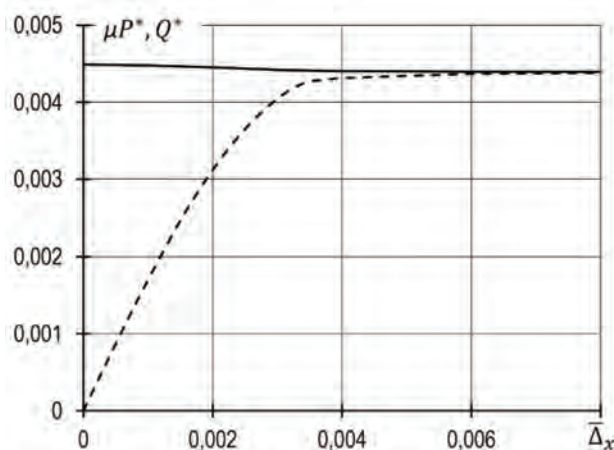


Рис. 3. Залежність нормальної і дотичної сил від дотичного зсуву

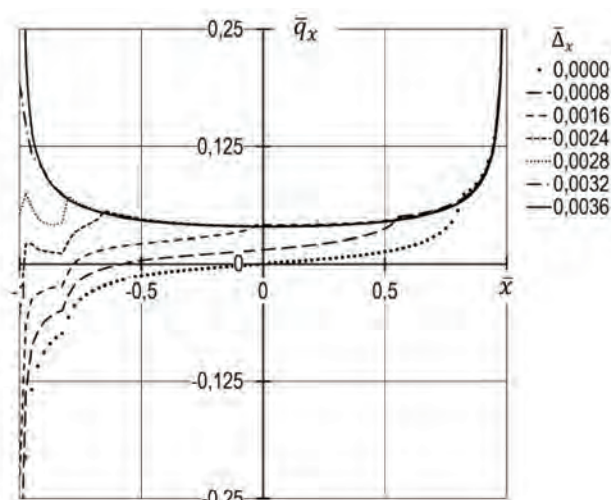


Рис. 4. Розподіли питомих дотичних контактних зусиль

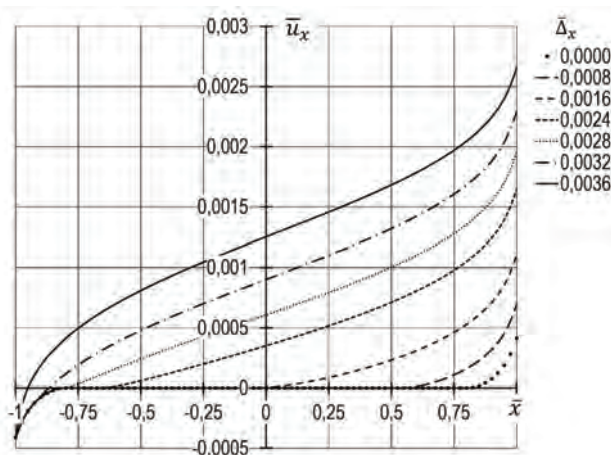


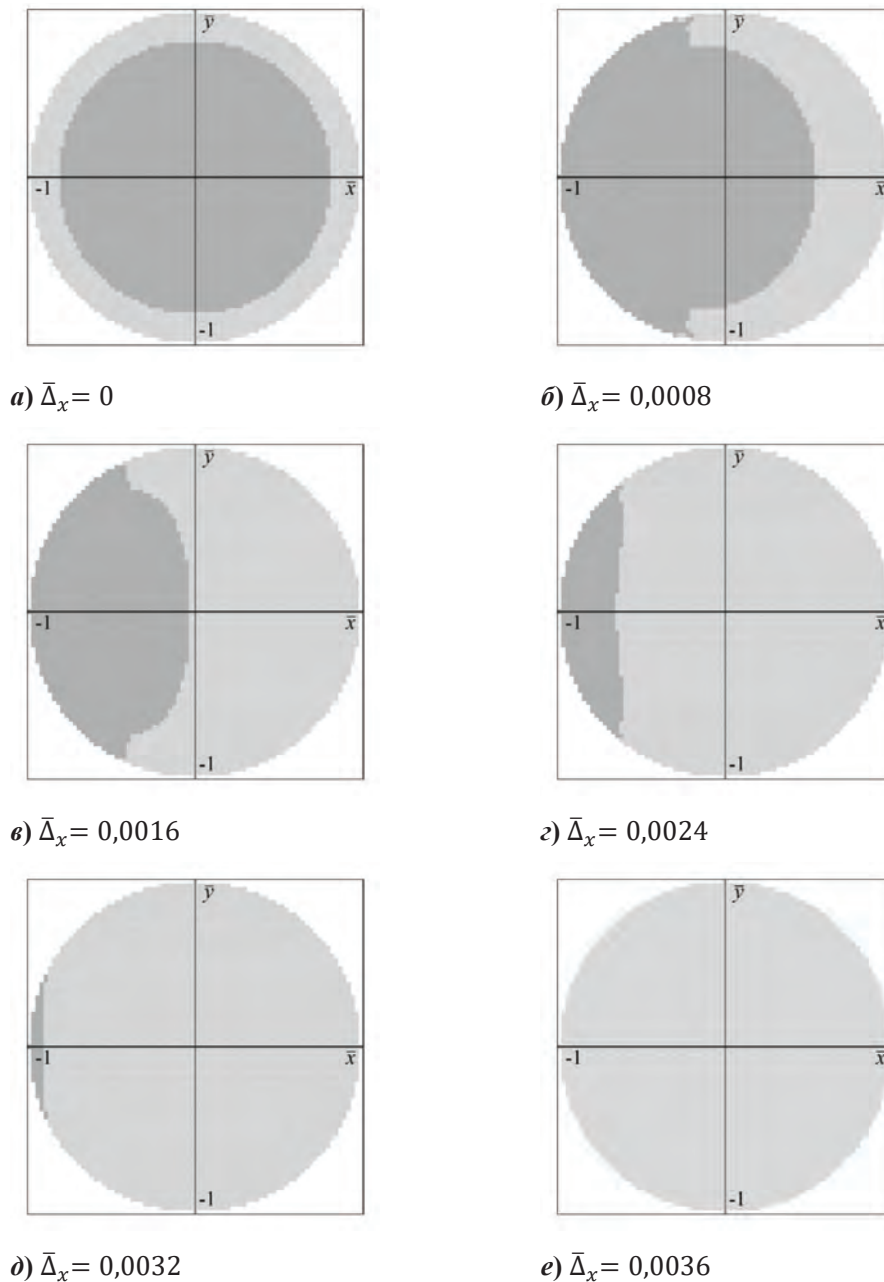
Рис. 5. Залежність відносних дотичних переміщень контактуючих поверхонь від координати

за різних значень дотичного зсуву  $\bar{\Delta}_x$  від 0 до 0,0036 подано на рис. 4.

На рис. 5 подано відповідні залежності відносних дотичних переміщень контактуючих поверхонь  $\bar{u}_x = u_x / R$  від координати  $\bar{x}$ . Тут  $u_x$  – переміщення точок поверхні півпростору, розташованих на осі  $Ox$ , відносно протилежних точок основи штампа.

Конфігурації зон зчеплення та проковзування, що відповідають різним значенням  $\bar{\Delta}_x$ , подано на рис. 6. Тут темно-сірим кольором зображено зону зчеплення, світло-сірим – зону проковзування.

**Обговорення результатів.** Аналіз отриманих результатів показує, що при нормальному навантаженні штампа (за рахунок його переміщення  $\bar{\Delta}_z = 0,008$ ) в області контакту утворюється центральна кругова область зчеплення і прилегла до краю кільцева зона проковзування. Отримані розподіли нормальних і дотичних контактних зусиль (рис. 2), а також відносний радіус зони зчеплення і осадка штампа добре узгоджуються з аналітичним розв'язком осесиметричного аналога задачі Галіна [13; 22]. Відносна помилка порівнюваних значень не перевищує 2%.



**Рис. 6. Конфігурації зон зчеплення та проковзування при різних значеннях дотичного переміщення штампа  $\bar{\Delta}_x$**

За умови, коли при фіксованому значенні  $\bar{\Delta}_z$  на штамп починає діяти монотонно зростаюча дотична сила, що спричиняє його переміщення  $\bar{\Delta}_x$  (в напрямку, протилежному додатному напрямку осі  $Ox$ ), зона зчеплення втрачає центральну симетрію, її «ліва» межа відразу ж охоплює область, прилеглу до краю основи штампа, а «права» зміщується в напрямку переміщення штампа (рис. 6). Як видно з рис. 3, зі збільшенням значення  $\bar{\Delta}_x$  дотична сила  $Q^*$  зростає за нелінійним законом, при цьому нормальна сила  $P^*$  близька до сталої (спостерігається несуттєве зменшення сили  $P^*$ , приблизно на 2% від її максимального значення при  $\bar{\Delta}_x = 0$ ). При  $\bar{\Delta}_x \geq 0,0036$  графіки  $P^*$  і  $Q^*$  починають асимптотично зближуватись, що відповідає початку повного проковзування штампа по поверхні півпростору (рис. 6 e). При  $\bar{\Delta}_x = 0,006$  відношення  $Q^*/P^*$  дорівнює приблизно 0,0248, що не більше ніж на 1% відхиляється від заданого коефіцієнта тертя  $\mu = 0,25$ . Цей результат підтверджується також аналізом графіків дотичних контактних зусиль і відносних дотичних переміщень контактуючих поверхонь (суцільні лінії на рис. 4, 5). Дотичні контактні зусилля в цьому випадку прямо пропорційні контактним тискам, а відносні переміщення відмінні від їх значень, досягнутих на нормальному етапі, та досягають максимальних значень біля правого краю основи штампа.

**Висновки.** Методом нелінійних крайових інтегральних рівнянь отримано наближений розв'язок квазістатичної контактної задачі про фрикційну взаємодію жорсткого циліндричного штампа з плоскою основою та пружного півпростору, за умови послідовної дії на штамп монотонно зростаючих нормального та дотичного навантажень.

За допомогою числових розрахунків при різних значеннях дотичного переміщення штампа досліджено процес зміни розподілів діючих на його основу питомих контактних зусиль, відносних переміщень контактуючих поверхонь, форм і розмірів зон зчеплення і проковзування при поступовому збільшенні дотичного навантажування. Встановлено, що з початком дії дотичної сили зона зчеплення, що утворилась на нормальному етапі навантажування, втрачає центральну симетрію і зміщується до переднього, відносно напрямку руху, краю штампа. При монотонному зростанні зовнішнього дотичного зусилля площа зони зчеплення зменшується і стає нульовою за умови початку повного проковзування штампа по поверхні півпростору. Відносні переміщення контактуючих поверхонь при цьому зростають при наближенні до заднього, відносно напрямку руху, краю штампа, біля якого вони приймають максимальні значення. Порівняння отриманих результатів з відомими свідчить про їх коректність.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi. *Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei*. 1938. 27(6). P. 342–348, 434–436, 474–478.
2. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 1949. 16(3). P. 259–268.
3. Kalker J.J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies. *ZAMM*. 1977. 57(5). T3–T17.
4. Hills D.A., Urriolagoitia Sosa G. Origins of partial slip in fretting – a review of known and potential solutions. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1999 34(3). P. 175–181.
5. Barber J.R., Ciavarella M. Contact mechanics. *International Journal of Solids and Structures*. 2000. 37(1–2). P. 29–43.
6. Goryacheva I.G., Martynyak R.M. Contact problems for textured surfaces involving frictional effects. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part J: Journal of Engineering Tribology*. 2014. 228(7). P. 707–716.
7. Andresen H., Hills D.A. A review of partial slip solutions for contacts represented by half-planes including bulk tension and moments. *Tribology International*. 2020. 143. 106050
8. Джонсон К.Л. Механика контактного взаимодействия. Москва: Мир, 1989. 510 с.
9. Hills D.A., Nowell D., Sackfield A. *Mechanics of Elastic Contact*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1993.
10. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев: Наук. Думка, 2006. 328 с.
11. Popov V.L. *Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications*. Berlin: Springer, 2017.
12. Barber J.R. *Contact mechanics*. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2018.
13. Острик В.И. Метод факторизації та його узагальнення у змішаних задачах теорії пружності. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2018. 480 с.
14. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. *Прикладная математика и механика*. 1945. Т. 9, вып. 5. С. 413–424.
15. Zhupanska O.I. On the analytical approach to Galin's stick-slip problem. A survey. *Journal of Elasticity*. 90(3). P. 315–333.
16. Моссаковский В. И. Сжатие упругих тел в условиях сцепления (осесимметричный случай). *Прикладная математика и механика*. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 418–427.



17. Goodman L.E. Contact stress analysis of normally loaded rough spheres. *J. Appl. Mech.* 1962. 29(3). P. 515–522.
18. Spence D. Self-similar solutions to adhesive contact problems with incremental loading. *Proc. Roy. Soc.* 1968. A 305. P. 55–80.
19. Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости. Киев: Наукова Думка, 1985. 175 с.
20. Spence D. The Hertz contact problem with finite friction. *Journal of elasticity.* 1975. 5(3). P. 297–319.
21. Turner J. R. The frictional unloading problem on linear elastic half-space. *IMA Journal of Applied Mathematics.* 1979. Vol. 24. P. 439–469.
22. Острик В.И. Контактное взаимодействие кругового штампа с упругим полупространством при наличии трения и сцепления. *Теор. и прикл. механика.* 2011. 2(48). С. 22–28.
23. Стреляев Ю. М., Клименко М. І., Стреляев О. Ю. Контакт плоского циліндричного штампа з пружним півпростором при немонотонному навантажуванні з урахуванням тертя. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2018. № 2. С. 142–151.
24. Стреляев Ю.М., Тітова О.О. Контакт зі зчепленням і проковзуванням циліндричного плоского штампа з заокругленим краєм та пружного півпростору. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2020. № 1. С. 86–92.
25. Стреляев Ю. М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для решения квазистатической контактной задачи о взаимодействии упругих тел при наличии кулонова трения. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки.* 2016. Т. 20, № 2. С. 306–327.
26. Александров А. И., Стреляев Ю. М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для контактных задач теории упругости. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий.* 2014. 3(7). С. 36–40.
27. Стреляев Ю.М. Решение квазистатической контактной задачи теории упругости с учетом трения. *Вісник ЗНУ. Математичне моделювання і прикладна механіка. Фізико-математичні науки.* 2014. № 2. С. 161–172.

#### REFERENCES

1. Cattaneo, C. (1938). Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi. *Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei*, 27(6), 342–348, 434–436, 474–478.
2. Mindlin, R.D. (1949). Compliance of elastic bodies in contact. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 16(3), 259–268.
3. Kalker, J.J. (1977). A survey of the mechanics of contact between solid bodies. *ZAMM*, 57(5), T3–T17.
4. Hills, D.A. & Urriolagoitia Sosa, G. (1999). Origins of partial slip in fretting – a review of known and potential solutions. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 34(3), 175–181.
5. Barber, J.R. & Ciavarella, M. (2000). Contact mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 37(1–2), 29–43.
6. Goryacheva, I.G. & Martynyak, R.M. (2014). Contact problems for textured surfaces involving frictional effects. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 228(7), 707–716.
7. Andresen, H. & Hills, D.A. (2020). A review of partial slip solutions for contacts represented by half-planes including bulk tension and moments. *Tribology International*, 143, 106050.
8. Johnson, K.L. (1985). Contact mechanics. Cambridge: Cambridge University Press.
9. Hills, D.A., Nowell, D. & Sackfield, A. (1993). Mechanics of Elastic Contact. Oxford: Butterworth-Heinemann.
10. Ostryk, V.I. & Ulitko, A.F. (2006). *Metod Vinera–Hopfa v kontaktnykh zadachah teorii uprugosti* [The Wiener–Hopf Method in Contact Problems of Elasticity Theory]. Kyiv: Naukova Dumka. (in Ukrainian).
11. Popov, V.L. (2017). Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Berlin: Springer.
12. Barber, J.R. (2018). Contact mechanics. Dordrecht, TheNetherlands: Springer.
13. Ostryk, V.I. (2018). *Metod faktoryzatsii ta yoho uzahalnennia u zmishanykh zadachakh teorii pruzhnosti* [Factorization method and its generalization in mixed problems of elasticity theory]. Kyiv: VPC «Kyivskiyi universytet». (in Ukrainian).
14. Galin, L.A. (1945). Indentation of a punch in the presence of friction and adhesion. *Prikl. Mat. Mekh.*, 9(5), 413–424.

15. Zhupanska, O.I. (2008). On the analytical approach to Galin's stick-slip problem. A survey. *Journal of Elasticity*, 90(3), 315-333.
16. Mossakovskii, V.I. (1963). Compression of elastic bodies under conditions of adhesion (axisymmetric case). *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 27(3), 630-643.
17. Goodman, L.E. (1962). Contact stress analysis of normally loaded rough spheres. *J. Appl. Mech.*, 29(3), 515-522.
18. Spence D. (1968). Self-similar solutions to adhesive contact problems with incremental loading. *Proc. Roy. Soc., A* 305, 55–80.
19. Mossakovskii, V.I., Kachalovskaja, N.E. & Golikova, S.S. (1985). *Kontaktnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Contact problems of the mathematical theory of elasticity]. Kiev: Naukova Dumka. (in Russian).
20. Spence, D. (1975). The Hertz contact problem with finite friction. *Journal of elasticity*, 5(3), 297–319.
21. Turner, J. R. (1979). The frictional unloading problem on linear elastic half-space. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 24, 439–469.
22. Ostrik, V.I. (2011). Kontaktnoe vzaimodejstvie krugovogo shtampa s uprugim polu-prostranstvom pri nalichii trenija i sčeplenija [Contact interaction of circular stamp with elastic half-space with regard for friction and adhesion] *Teor. i prikl. mehanika*, 2(48), 22–28. (in Russian).
23. Streliaiev, Yu.M., Klymenko, M.I., & Streliaiev, O.Yu. (2018). Kontakt ploskoho tsylindrychnoho shtampa z pruzhnym pivprostorom pry nemo-notonnomu navantazhuvanni z urakhuvanniam tertia [Contact with friction of a flat cylindrical punch with an elastic half-space under nonmonotonic loading]. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, 2, 142–151. (in Ukrainian).
24. Streliaiev, Yu.M. & Titova, O.O. (2020). Kontakt zi zcheplenniam i prokovzuvanniam tsylindrychnoho ploskoho shtampa z zaokruhlenym kraiem ta pruzhnoho pivprostoru [Stick-slip contact of the cylindrical flat punch with a rounded edge and elastic half-space]. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, 1, 86–92. (in Ukrainian).
25. Streliaiev, Yu. M. (2016). Metod nelinejnyh granichnyh integral'nyh uravnenij dlja reshenija kvazi-staticheskoj kontaktnoj zadachi o vzaimodejstvii uprugih tel pri nalichii kulonova trenija [A nonlinear boundary integral equations method for the solving of quasistatic elastic contact problem with Coulomb friction]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz. -Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 20(2), 306–327. (in Russian).
26. Alexandrov, A., & Streliaiev, Y. (2014). Metod nelinejnyh granichnyh integral'nyh uravnenij dlja kontaktnykh zadach teorii uprugosti [Nonlinear boundary integral equation's method for elastic contact problems]. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3(7), 36–40. (in Russian).
27. Streliaiev, Y.M. (2014). Reshenie kvazistaticheskoi kontaktnoj zadachi teorii uprugosti s uchetom trenija [Solution of the quasistatic contact problem of elasticity with friction]. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, 2, 161–172. (in Russian).

**ЙМОВІРНІСТЬ: ВІД ПОЛІНОМІВ ЕРМІТА ДО КВАДРАТУРИ ГАУССА****Хомченко А. Н.**

*доктор фізико-математичних наук, професор,  
професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем  
Чорноморський національний університет імені Петра Могили  
вул. 68 Десантників, 10, Миколаїв, Україна  
[orcid.org/0000-0002-5053-388X](https://orcid.org/0000-0002-5053-388X)  
[khan@chmnu.edu.ua](mailto:khan@chmnu.edu.ua)*

**Литвиненко О. І.**

*кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін  
Херсонська філія  
Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова  
пр. Ушакова, 44, Херсон, Україна  
[orcid.org/0000-0001-9890-6959](https://orcid.org/0000-0001-9890-6959)  
[mmkntu@gmail.com](mailto:mmkntu@gmail.com)*

**Астіоненко І. О.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання  
Херсонський національний технічний університет  
Бериславське шосе, 24, Херсон, Україна  
[orcid.org/0000-0002-5831-6353](https://orcid.org/0000-0002-5831-6353)  
[astia@ukr.net](mailto:astia@ukr.net)*

**Ключові слова:** *кусково-лінійна інтерполяція, функція-«кришка», геометрична ймовірність, закон Ерміта розподілу ймовірностей, щільність розподілу Ерміта, числові характеристики розподілу Ерміта, квадратурні правила Гаусса.*

Стаття присвячена використанню ймовірнісних моделей у неймовірнісних задачах. Нові приклади, що наведені в роботі, допоможуть збільшити кількість прихильників рандомізації в математичному моделюванні. Розглядаються задачі відновлення фінітних функцій (функції-«кришки», функції Ерміта), які дуже поширені в методі скінченних елементів (МСЕ). Функція-«кришка» – це інша назва барицентричної координати, запропонованої Мьобіусом. На відміну від інтерполяції за Лагранжем, інтерполяція за Ермітом передбачає наявність у вершинах контрольного інтервалу інформації про функцію та її похідну. Зростаючі поліноми Ерміта на канонічних інтервалах  $[0; 1]$  і  $[-1; 1]$  розглядаються як функції розподілу ймовірностей. Порівнюються два методи побудови поліномів Ерміта: традиційний (матричний) і нетрадиційний (ймовірнісний). Показано, що щільність і середнє квадратичне відхилення закону розподілу ймовірностей Ерміта мають тісний зв'язок із формулами наближеного інтегрування (квадратурами) підвищеної точності: Гаусса-Бернуллі (два вузли на  $[0; 1]$ ), Гаусса-Лежандра (два вузли на  $[-1; 1]$ ), Гаусса-Лобатто (для чотирьох вузлів). Ці результати свідчать про наявність «зворотного руху» ідей і методів із теорії ймовірностей в інші математичні науки. На гостру необхідність «зворотного руху» неодноразово звертав увагу видатний український науковець, фахівець з теорії ймовірностей і випадкових процесів академік А.В. Скороход. Дуже

важливо, щоб «зворотний рух» підтримували усі математики, як «ймовірністики», так і «неймовірністики» (термін А.В. Скорохода).

Отримані результати вже не вперше переконують, що геометрична ймовірність – це простий, наочний і дуже ефективний метод математичного моделювання. Не дивно, що сучасні інформаційні технології починаються з когнітивних моделей прикладної геометрії. Такі моделі, як правило, математично обґрунтовані і фізично адекватні.

## PROBABILITY: FROM HERMITE POLYNOMIALS TO GAUSS QUADRATURE

**Khomchenko A. N.**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Professor at the Department of Intellectual Information Systems  
Petro Mogyla Black Sea National University  
68 Desantnykiv str., 10, Mykolaiv, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-5053-388X  
khan@chmnu.edu.ua*

**Lytvynenko O. I.**

*Ph.D., Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Information Technologies and Physical  
and Mathematical Disciplines  
Kherson Branch  
of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding  
Ushakov avenue, 44, Kherson, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-9890-6959  
mmkntu@gmail.com*

**Astionenko I. O.**

*Ph.D., Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Mathematical Modelling  
Kherson National Technical University  
Berislavsky highway, 24, Kherson, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-5831-6353  
astia@ukr.net*

**Key words:** *piecewise-linear interpolation, “lid”-function, geometric probability, Hermite’s law of probability distribution, Hermite’s density of distribution, numerical characteristics of Hermite distribution, Gauss quadrature rules.*

The article is devoted to the use of probabilistic models in improbable problems. The new examples presented in the paper will help to increase the number of supporters of randomization in mathematical modeling. Problems of restoration of finite functions (“lids”-functions, Hermite functions), which are widespread in a method of finite elements (MFE) are considered in the work. The “lid”-function is another name for the barycentric coordinate proposed by Möbius. In contrast to Lagrange interpolation, Hermite interpolation provides for the presence of information about a function and its derivative at the apexes of the control interval. Increasing Hermite polynomials at canonical intervals  $[0; 1]$  and  $[-1; 1]$  are considered as functions of probability distribution. Two methods of constructing Hermite polynomials are compared: traditional (matrix) and non-traditional (probabilistic). It is shown that the density and average quadratic deviation of the Hermite probability distribution law are closely related to the formulas of approximate integration (quadratures) of enhanced accuracy: Gauss-Bernoulli (two nodes on  $[0; 1]$ ), Gauss-Legendre (two nodes on  $[-1; 1]$ ), Gauss-Lobatto (for four nodes). These results indicate



the presence of a “reverse movement” of ideas and methods from probability theory to other mathematical sciences. A prominent Ukrainian scientist, a specialist in probability theory and random processes, the academician A.V. Skorokhod has repeatedly drawn attention to the urgent need for “reverse movement”. It is very important that the “reverse movement” was supported by all mathematicians, both “probabilists” and “non-probabilists” (A.V. Skorokhod’s term).

It is not the first time that the obtained results convince that geometric probability is a simple, clear and very effective method of mathematical modeling. Not surprisingly modern information technologies begin with cognitive models of applied geometry. Such models are usually mathematically sound and physically adequate.

**Вступ.** Математична теорія ймовірностей вже з часів Пуассона, Лапласа і Гаусса використовує складний математичний апарат. Нині в публікаціях «ймовірнісників» трапляється практично увесь класичний математичний аналіз, включаючи теорію рівнянь з частинними похідними, а також апарат теорії міри та функціонального аналізу. Незважаючи на це, теорія ймовірностей довгий час не вважалася математичною наукою. Поступове визнання теорії ймовірностей як математичної науки почалося у 1933 році, коли А.М. Колмогоров опублікував у видавництві Шпрингера німецькою мовою статтю «Основні поняття теорії ймовірностей» з аксіоматичною побудовою цієї теорії.

Специфічність проблеми полягає в тому, що теорія ймовірностей виступає стосовно всієї іншої математики як споживач. А.В. Скороход звертає увагу науковців на відсутність зворотного руху плідних ідей і нових методів. У нашій роботі використовується ймовірнісна інтерпретація задач відновлення фінітних функцій, які дуже поширені в методі скінченних елементів (МСЕ). Базисні лінійні і кубічні поліноми розглядаються як закони розподілу ймовірностей. Це допомагає зрозуміти, що зворотний рух (на жаль, повільний) насправді існує, але інколи він проявляється найнесподіванішим чином.

**Огляд літератури.** Ретроспективний аналіз варто почати зі статті А.В. Скорохода, яка була опублікована у 1977 р. у журналі «У світі математики» [1]. Саме у цій роботі автор називає причини, які поділяють математиків на «ймовірнісників» і «неймовірнісників». Наполегливо та емоційно він пропонує ліквідувати напівнепроникну плівку, яка стримує зворотний рух ідей і методів.

На думку А.В. Скорохода, ця плівка знаходиться у свідомості математиків, які не знайомі навіть з азами теорії ймовірностей. Безумовно, ця стаття викликала певний резонанс. Невипадково професор математики Каліфорнійського університету (США) М. Шилінг надіслав свою статтю саме до редколегії журналу «У світі математики». Ця публікація у перекладі українською мовою вийшла у 2000 р. [2]. М. Шилінг підібрав приклади, які здатні якимось заспокоїти прихиль-

ників А.В. Скорохода і запевнити читачів, що зворотний рух відбувається. Нам також подобається ця тематика, ми слідкуємо за станом справ з 1982 р. [3]. Наші пошуки нових прикладів тривають [4; 5]. Тепер ми розглядаємо з ймовірнісної точки зору фінітні функції обчислювальної математики: функцію-«кришку», з якої почався розвиток МСЕ [6–8], і поліноми Ерміта, які успішно моделюють деформації згину пружних балок [9–11]. Варто відзначити, що ймовірність дає можливість не тільки знайти нову інтерпретацію поліномів, але і запропонувати новий (ймовірнісний) метод побудови цих поліномів (як за Лагранжем, так і за Ермітом). Розглядаючи поліноми як закони розподілу ймовірності випадкових величин і визначаючи числові характеристики цих законів, ми встановлюємо зв’язок ймовірності з квадратурами Гаусса. Корисно познайомитись з книгою [12], в якій є необхідна інформація і про поліноми Ерміта і про квадратури Гаусса. На жаль, деякі автори користуються поліномами Ерміта (які відомі вже 150 років), не посилаючись на Ерміта. Неприємно вражають автори [6; 8] – співвітчизники видатного французького математика Ерміта. У роботі [8] поліном Ерміта називають поліномом Кунса. Це не зовсім правильно: заслуга Кунса у поширенні поліномів Ерміта на 2D-апроксимації (метод Кунса, 1966 р.).

**Мета дослідження** – за допомогою геометричної ймовірності сконструювати функцію-«кришку» (кусково-лінійний поліном) і функцію Ерміта (кусково-кубічний поліном); показати, що на канонічних інтервалах  $[0; 1]$  і  $[-1; 1]$  зростаючі поліноми мають всі властивості інтегральної функції розподілу ймовірностей; знайти ймовірнісний зміст та ймовірнісний розв’язок задачі про розташування вузлів на обчислювальних шаблонах квадратів Гаусса (за версіями Бернуллі, Лежандра, Лобатто).

#### **Виклад основного матеріалу дослідження.**

**1. Ймовірність та кусково-лінійні базисні функції в задачах інтерполяції.**

Нехай функція  $y = f(x)$  визначена на  $[a, b]$ . Введемо на  $[a, b]$  сітку  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  і поставимо у відповідність кожному вузлу  $i$  функцію  $\phi_i(x)$  (рис. 1).

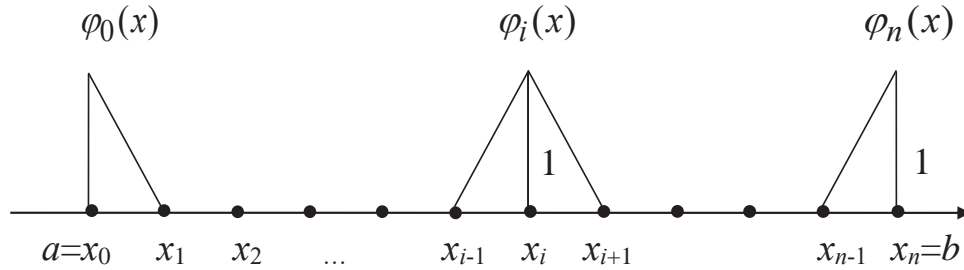


Рис. 1. Кусково-лінійні базисні функції

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \notin [x_0, x_1]. \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & x \notin [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

У теорії інтерполяції функції-«кришки» відомі давно, але нова хвиля інтересу до них пов'язана із методом скінченних елементів [6–8]. Читачі, знайомі з цим методом, впізнають (рис. 1) одновимірний аналог функції Куранта (1943 р.).

Інтерполяційний поліном має вигляд:

$$y = \sum_{i=0}^n \phi_i(x) \cdot f_i,$$

де  $f_i$  – вузлові значення функції.

Головна перевага кусково-лінійної інтерполяції в тому, що зростаюча кількість вузлів не викликає небажаних осциляцій.

Ми шукаємо в кусково-лінійних функціях ймовірність. Звертаємо увагу, що всі функції (рис. 1) змінюються від 0 до 1. Кожна «кришка» накриває два одновимірні симплекси, або один, якщо це «напівкришка». Кожний симплекс має дві вершини і дві барицентричні координати. Термін «барицентричні» запропонував Мьобіус (1827 р.). Функція-«кришка» – це інша назва барицентричної координати. Формули (1) здійснюють зв'язок декартової координати точки  $x$  з барицентричними координатами цієї точки у відповідному симплексі. Таким чином,  $\phi_i(x)$  – це ймовірність випадкового попадання у відрізок симплекса від точки  $x$  до протилежної вершини симплекса ( $x_{i-1}$  або  $x_{i+1}$ ). З точки зору теорії ймовірностей досить лишити тільки зростаючі «напівкришки», а у фор-

мулах (1) замінити 0 на 1 на правому кінці відповідного симплекса. Саме так виглядає інтегральна форма (закон) рівномірного розподілу ймовірностей. Маючи на увазі квадратури Гаусса, нижче ми розглядаємо замість  $[a; b]$  канонічні інтервали  $[0; 1]$  та  $[-1; 1]$ . Покажемо, як виглядають функції рівномірного розподілу на цих інтервалах. У теорії ймовірностей ці функції традиційно позначають через  $F(x)$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}(x+1), & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Ці функції зображено на рис. 2.

Взагалі функція розподілу випадкової величини  $X$  – це ймовірність влучення випадкової точки у «сприятливий» інтервал  $F(x) = P(X < x)$ . На рис. 2 «сприятливі» частини заштриховані.

2. Ймовірність та кубічні поліноми Ерміта.

На відміну від інтерполяції за Лагранжем, інтерполяція за Ермітом передбачає наявність у вершинах контрольного інтервалу інформації про функцію та її похідну. Таким чином, задача полягає у визначенні чотирьох коефіцієнтів кубічного полінома:

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3. \quad (3)$$

Для цього формулюють інтерполяційну гіпотезу Ерміта (відповідні граничні умови). Наприклад, для зростаючого полінома на  $[0; 1]$  граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, & F(1) &= 1, \\ F'(0) &= 0, & F'(1) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничні умови на  $[-1; 1]$  відрізняються від (4) лише абсцисою на лівому кінці.

Таким чином, ми отримали функцію нерівномірного розподілу ймовірностей (закон Ерміта). Як бачимо, для побудови функції нерівномірного розподілу ймовірностей не досить знати її

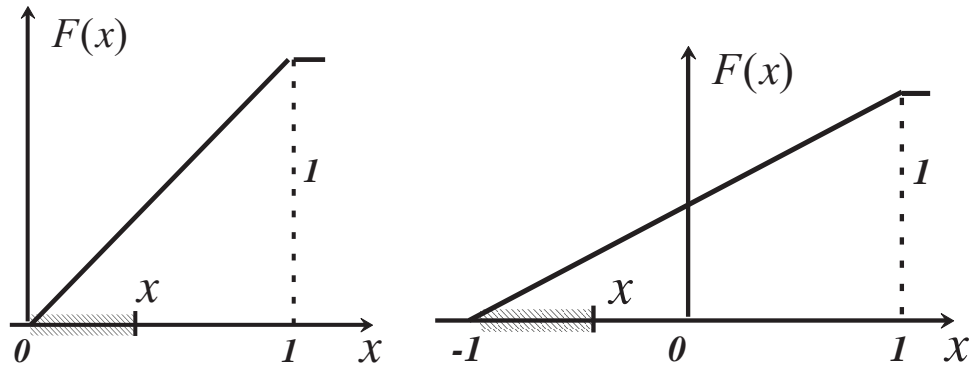


Рис. 2. Графіки функцій рівномірного розподілу випадкової величини в  $[0; 1]$  та  $[-1; 1]$

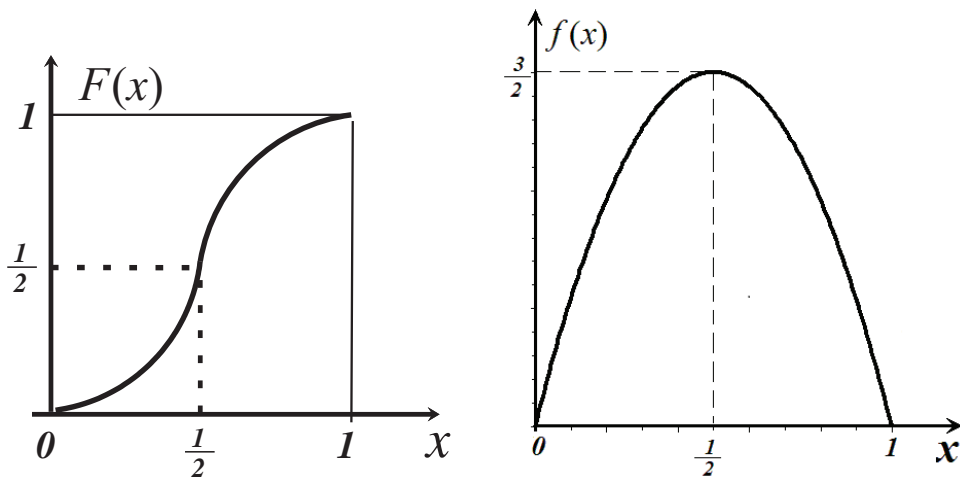


Рис. 3. Інтегральна та диференціальна функції розподілу ймовірностей (закон Ерміта)

граничні значення, потрібні додатково граничні значення щільності розподілу  $f(x) = F'(x)$ . У деяких джерелах ці функції називають відповідно інтегральною і диференціальною. Опускаючи подробиці, запишемо результат матричного методу:

$$\begin{aligned} \text{на } [0; 1] \quad F(x) &= -2x^3 + 3x^2; \quad f(x) = -6x^2 + 6x; \\ \text{на } [-1; 1] \quad F(x) &= \frac{1}{4}(-x^3 + 3x + 2); \quad f(x) = \frac{1}{4}(-3x^2 + 3). \end{aligned} \quad (5)$$

Довжина канонічного інтервалу принципово не впливає на поведінку кубічних і квадратичних парабол (5). Тому на рис. 3 подано випадок  $[0; 1]$ .

У теорії ймовірностей закон Ерміта виглядає так:

$$\begin{aligned} \text{на } [0; 1] \quad F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -2x^3 + 3x^2, & x \in [0; 1], \\ 1, & x > 1; \end{cases} \\ f(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -6x^2 + 6x, & x \in [0; 1], \\ 0, & x > 1; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{на } [-1; 1] \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{4}(-x^3 + 3x + 2), & x \in [-1; 1], \\ 1, & x > 1; \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{3}{4}(-x^2 + 1), & x \in [-1; 1], \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Уважний читач, мабуть, уже помітив, що закон Ерміта можна отримати, не користуючись матричною алгеброю. Враховуючи граничні умови і властивості щільності, отримаємо спочатку  $f(x)$ . Після цього невизначеним інтегруванням відновлюємо  $F(x)$ . Нам подобається нематричний метод, в якому використовується добуток «напівкришок». Нагадаємо, що функція-«напівкришка» – це ймовірність. Тому йдеться про теорему множення ймовірностей. Дві «напівкришки» приховані у граничних умовах. Поліном  $F(x)$  має двократний нуль на лівому кінці інтервалу. Третій нуль (простий) розташований за правим кінцем на

відстані половини канонічного інтервалу. Таким чином, розглядається композиція із двох симплексів. Для випадку  $[-1; 1]$  це показано на рис. 4.

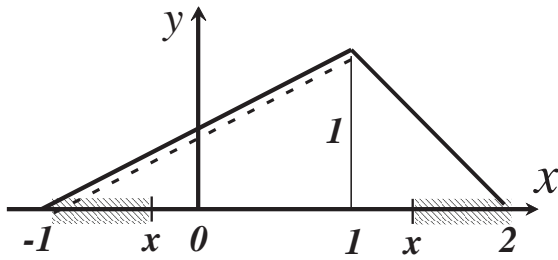


Рис. 4. Композиція «напівкришок» для  $F(x)$  на  $[-1; 1]$

Пунктирна пряма показує, що ліва «напівкришка» використовується двічі. Це означає, що у симплекс  $[-1; 1]$  кидають навмання дві точки, а в симплекс  $[1; 2]$  – одну. Ймовірність попадання двох точок у «сприятливий» інтервал  $[-1; x]$  дорівнює  $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ , ймовірність попадання точки в  $[x; 2]$  дорівнює  $(2-x)$ . Результат перемноження дає  $F(x) = \frac{1}{4}(-x^3 + 3x + 2)$ , щільність  $f(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)$ . Аналогічна композиція на  $[0; 1]$  дає відповідні формули (див. (5)). Математичне сподівання

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx;$$

для  $[0; 1]$  – це  $\frac{1}{2}$ , для  $[-1; 1]$  – це 0.

Саме в цих точках  $F(x)$  має перегин, а  $f(x)$  – максимум.

Сформулюємо задачу про щільність, яка дає несподівану можливість зробити крок із теорії ймовірностей у чисельні методи, а саме до квадратур Гаусса.

3. *Задача про щільність розподілу ймовірностей (від Ерміта до Гаусса).*

Нехай випадкова величина  $X$  розподілена за законом Ерміта. Знайти на канонічному інтервалі точки, в яких щільність нерівномірного розподілу співпадає із щільністю рівномірного розподілу ймовірностей.

Для  $[0; 1]$  маємо рівняння  $-6x^2 + 6x = 1$ , звідки  $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ . Це нулі відомого рівняння Бернуллі другого порядку. Саме в цих точках Гаусс розта-

шував вузли квадратури найвищої алгебраїчної точності.

Для  $[-1; 1]$  маємо рівняння  $\frac{3}{4}(-x^2 + 1) = \frac{1}{2}$ , звідки  $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Це нулі відомого рівняння

Лежандра другого порядку.

Квадратура Гаусса-Бернуллі:  $\int_0^1 \phi(x) dx \approx \frac{1}{2}(\phi(x_1) + \phi(x_2))$ ,

квадратура Гаусса-Лежандра:  $\int_{-1}^1 \phi(x) dx \approx \phi(x_1) + \phi(x_2)$ .

Квадратура Гаусса-Лобатто визначається через дисперсію (точніше, через середнє квадратичне відхилення) закону Ерміта:

$$D(X) = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}; \quad \sigma(X) = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Квадратура є точною для многочленів степеня 5, має чотири вузли: два на кінцях інтервалу, ще два в точках:

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}; \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Обчислювальна формула Гаусса-Лобатто на  $[0; 1]$ :

$$\int_0^1 \phi(x) dx \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{6} \cdot \phi(0) + \frac{5}{6} \cdot \phi(x_1) + \frac{5}{6} \cdot \phi(x_2) + \frac{1}{6} \cdot \phi(1) \right).$$

Для  $[-1; 1]$ :

$$D(X) = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \left( -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4} \right) dx = \frac{1}{5}; \quad \sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Формула Гаусса-Лобатто:

$$\int_{-1}^1 \phi(x) dx \approx \frac{1}{6} \cdot \phi(-1) + \frac{5}{6} \cdot \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{5}{6} \cdot \phi\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{6} \cdot \phi(1).$$

Як бачимо, це простіше і легше, ніж скласти і розв'язати систему нелінійних алгебраїчних рівнянь.

**Висновки.** Отримані результати вже не вперше переконують, що геометрична ймовірність – це простий, наочний і дуже ефективний метод математичного моделювання. Не дивно, що сучасні інформаційні технології починаються з когнітивних моделей прикладної геометрії. Такі моделі, як правило, математично обгрунтовані і фізично адекватні. На перспективу автори планують з ймовірнісної точки зору подивитися на поліном Ерміта п'ятого порядку  $G(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$ , який має всі властивості закону нерівномірного розподілу ймовірностей. Здається, не всі цікаві властивості  $G(x)$  нам відомі, хоча перший крок уже зроблено і зворотний рух триває.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Скороход А.В. Особливий характер теорії ймовірностей в математичних науках. *У світі математики*. 1997. Т. 3, вип. 2. С. 2-4.



2. Шіллінг М. Ймовірність: від Монте-Карло до геометрії. *У світі математики*. 2000. Т. 6, вип. 3. С. 20–23.
3. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты метода конечных элементов. Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. 1982, 9 с. *Деп. в ВИНТИ 18.03.82 г. № 1213-82 Деп.*
4. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Ймовірнісні моделі у неймовірнісних задачах. *Вісник Херсонського національного техн. університету*. 2019. № 2 (69), ч. 3. С. 88–92.
5. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Когнітивно-графічний аналіз ієрархічних базисів скінченних елементів : монографія. Херсон : ОЛДІ-плюс, 2019. 260 с.
6. Деклу Ж. Метод конечных элементов : монография. Москва : Мир, 1976. 95 с.
7. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. Москва : Наука, 1981. 416 с.
8. Жермен-Лакур П., Жорж П.Л., Пистр Ф., Безье П. Математика и САПР: в двух кн. Кн. 2. Москва : Мир, 1989. 264 с.
9. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. Ленинград : Судостроение, 1977. 279 с.
10. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). Киев : Будівельник, 1980. 231 с.
11. Астіоненко І.А., Литвиненко Е.І., Хомченко А.Н. Когнітивно-графічний аналіз кривих Эрмита-Кунса пятого порядка. *Системні технології*. 2016. Вип. 3 (104). С. 73–78.
12. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. Москва : Атомиздат, 1972. 397 с.

#### REFERENCES

1. Skorokhod, A.V. (1997). Osoblyvyj kharakter teoriji jmovirnostej v matematychnykh naukakh. *U sviti matematyky*, 3, 2, pp. 2–4.
2. Shillingh, M. (2000). Jmovirnistj: vid Monte-Karlo do gheometriji. *U sviti matematyky*, 6, 3, pp. 20–23.
3. Khomchenko, A.N. (1982). Nekotorye veroyatnostnye aspekty metoda konechnykh elementov. Ivanofrank. in-t nefti i gaza. Dep. v VINITI 18.03.82 g. № 1213, 9 s.
4. Khomchenko, A.N., Lytvynenko, O.I., Astionenko, I.O. (2019). Jmovirnisni modeli u nejmovirnisnykh zadachakh. *Visnyk Khersonskogho nacionaljnogho tekhn. universytetu*, 2 (69), ch. 3, pp. 88–92.
5. Khomchenko, A.N., Lytvynenko, O.I., Astionenko, I.O. (2019). *Koghnytyvno-ghrafichnyj analiz ijerarkhichnykh bazysiv skinchennykh elementiv: monohrafija*. Kherson: OLDI-pljus.
6. Deklu, Zh. (1976). *Metod konechnykh elementov: monografiya*. Moscow: Mir.
7. Marchuk, G.I., Agoshkov, V.I. (1981). *Vvedenie v proektsionno-setochnye metody*. Moscow: Nauka.
8. Zhermen-Lakur, P., Zhorzh, P.L., Pistr, F., Bez'e, P. (1989). *Matematika i SAPR: v dvukh kn.* Kn. 2. Moscow: Mir.
9. Postnov, V.A. (1977). *Chislennye metody rascheta sudovykh konstruksiy*. Leningrad: Sudostroenie.
10. Nemchinov, Yu.I. (1980). *Raschet prostranstvennykh konstruksiy (metod konechnykh elementov)*. Kiev: Budivel'nik.
11. Astionenko, I.A., Litvinenko, E.I., Khomchenko, A.N. (2016). Kognitivno-graficheskiy analiz krivykh Ermita-Kunsa pyatogo poryadka. *Sistemni tekhnologii*, 3 (104), pp. 73–78.
12. Met'yuz, Dzh., Uoker, R. (1972). *Matematicheskie metody fiziki*. Moskva: Atomizdat.

УДК 539.3  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-10>

## ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ ШТАМПІВ ІЗ РІЗНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ НА ГРАНИЦІ ІЗОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ

**Шевельова Н. В.**

*аспірант кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, 49000, Україна  
[orcid.org/0000-0003-2135-4599](https://orcid.org/0000-0003-2135-4599)  
[nataliya.shevelyova@gmail.com](mailto:nataliya.shevelyova@gmail.com)*

**Ходанен Т. В.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, 49000, Україна  
[orcid.org/0000-0001-9194-3634](https://orcid.org/0000-0001-9194-3634)  
[hodanen@mmf.dnu.edu.ua](mailto:hodanen@mmf.dnu.edu.ua)*

**Ключові слова:** штамп, нормальні та дотичні напруження, переміщення, аналітичний розв'язок.

Розглянуто проблему взаємодії двох штампів із плоскими підшвами, що взаємодіють з пружною ізотропною півплощиною. Вважається, що один штамп жорстко зчеплений із півплощиною, а другий знаходиться з нею в умовах гладкого контакту. Для розв'язання задачі використовуються представлення Колосова-Мухелішвілі напружень і переміщень через кусково-аналітичні функції. Із використанням цих представлень і на основі граничних умов сформульовано задачу лінійного спряження, яка складається із комбінації рівнянь Діріхле і Рімана, записаних на відповідних ділянках границі півплощини. Ця задача називається комбінованою крайовою задачею Діріхле-Рімана. Розв'язок задачі представлено, використовуючи два канонічні розв'язки з необхідною поведінкою при підході до кутових точок штампів. Невідомі коефіцієнти цього розв'язку знаходяться з умов на нескінченності та умов рівноваги штампів із трансцендентного рівняння, коефіцієнти якого знаходяться шляхом чисельного інтегрування.

Знайдений розв'язок дозволив представити усі необхідні фактори на границі півплощини в досить простому аналітичному вигляді. Зокрема, знайдено формули, що дають можливість знайти осадку кожного штампу та форму вільної границі півплощини після деформації. Записано також формули, що визначають розподіл напружень під штампами. Показано, що розв'язок біля кутових точок жорстко зчепленого штампів має осцилюючу кореневу особливість, а біля кутових точок гладкого штампів – звичайну кореневу.

Для конкретних значень ширини штампів, відстаней між ними та величин зовнішнього навантаження одержано числові результати, які проілюстровано графічно. Побудовано графіки зміни переміщень границі півплощини біля штампів, а також графіки зміни нормального та дотичного напружень під зчепленим штампом і тільки нормального – під гладким. Виявлено, що зона затухання переміщень при віддаленні від штампів суттєво перевищує їхню ширину.

## AN INTERACTION OF RIGIDLY COUPLED AND SLIPPING STAMPS ON THE BOUNDARY OF AN ISOTROPIC HALF-PLANE

**Shevelova N. V.**

*Postgraduate Student at the Department of Theoretical and Computer Mechanics  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarin avenue, 72, Dnipro, 49010, Ukraine  
orcid.org/0000-0003-2135-4599  
nataliya.shevelyova@gmail.com*

**Khodanen T. V.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Theoretical and Computer Mechanics  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarin avenue, 72, Dnipro, 49010, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-9194-3634  
hodanen@mmf.dnu.edu.ua*

**Key words:** *stamp, normal and shear stresses, displacement, analytical solution.*

The problem of interaction of two stamps with flat bases which are contacted with an elastic isotropic half-plane is considered. It is assumed that one stamp is rigidly coupled to the half-plane, and the other is in smooth contact with it. To solve the problem, the Kolosov-Muskhelishvili representations of stresses and displacements through piecewise analytic functions are used. Applying these representations and satisfying the boundary conditions, the problem of linear relationship is formulated. It consists of a combination of Dirichlet and Riemann equations written on the corresponding sections of the half-plane boundary. This problem is called the combined Dirichlet-Riemann boundary value problem. The solution of the problem is presented by means of two canonical solutions that have the necessary behavior when approaching the corner points of the stamps. The unknown coefficients of this solution are found by means of the conditions at infinity and the conditions of equilibrium of the stamps. This leads to a transcendental equation, the coefficients of which are found by numerical integration.

The obtained solution allowed us to present all the necessary factors at the boundary of the half-plane in a fairly simple analytical form. In particular, formulas have been found that make it possible to find the sinking of each stamp and the shape of the free boundary of the half-plane after deformation. Formulas that determine the distribution of stresses under the stamps have also been found. It is shown that the solution at the corner points of a rigidly coupled stamp has an oscillating root singularity, and at the corner points of a smooth stamp it has a normal root singularity.

For specific values of the stamps width, the distances between them and the values of the external load, numerical results are obtained. They are illustrated graphically. The variations of displacements around the stamps are shown, as well as the graphs of the normal and tangential stresses under the rigidly coupled stamp are given whilst only normal stress is shown under the smooth stamp. It was found that the zone of attenuation of displacements at a distance from the stamps significantly exceeds their width.

**Вступ.** Задачі про дію штампів на пружні тіла активно вивчаються протягом останніх десятиліть у зв'язку з їхньою практичною важливістю. Результати досліджень по цій тема-

тиці наведено в багатьох публікаціях і, зокрема, в монографіях та підручниках К. Джонсона [1], В.М. Александрова і М.І. Чебакова [2], В.І. Острика [3]. У них детально розглянуто

гладкі і зчеплені штампи, а також більш складні випадки контакту за наявності областей зчеплення і проковзування в області контакту [4–6]. Задачі про дію декількох штампів на пружні тіла вивчалися у роботах [7–9].

Слід зазначити, що поодинокі штампи вивчені досить добре, але проблема стає значно складнішою при дії на границю пружного тіла декількох штампів. Особливо це проявляється для випадків різних граничних умов у контактних зонах різних штампів. Якраз такий випадок і розглядається у даній роботі, а саме вивчаються особливості деформування двох штампів, що діють на пружну півплощину за умови, що один із них жорстко зчеплений із півплощиною, а під підшоною іншого штампів тертя відсутнє. У рамках вказаної постановки одержані нові результати,

що ілюструють осадку кожного із штампів та напруження під ними залежно від їх взаємного розташування, навантаження та геометричних характеристик.

**Постановка задачі.** Розглянемо два штампи  $a \leq x \leq b$  і  $c \leq x \leq d$ , які діють на границю  $y = 0$  ізотропної півплощини  $y \leq 0$  (рис. 1) під дією сил  $P_1$  та  $P_2$ . Будемо вважати, що штамп, підшою якого співпадає з  $x \in [a, b]$ , є зчепленим з півплощиною, а штамп  $x \in [c, d]$  є таким, що проковзує. Вважаємо також, що штампи можуть переміщуватися лише вертикально. Півплощина характеризується коефіцієнтом Пуассона  $\nu_0$ , модулем зсуву  $\mu$ ,  $\kappa = 3 - 4\nu_0$ .

Будемо вважати, що підшови штампів плоскі. Тоді граничні умови на різних частинах границі півплощини мають вигляд:

$$u(x, 0) = r_0, \quad v(x, 0) = r_1 \quad \text{для } x \in [a, b], \quad (1)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = r_2 \quad \text{для } x \in [c, d], \quad (2)$$

$$\sigma_y(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad \text{для } x \notin \{[a, b] \cup [c, d]\}, \quad (3)$$

де  $a < b < c < d$ .

Тут  $r_0, r_1, r_2$  – дійсні сталі, які підлягають визначенню.

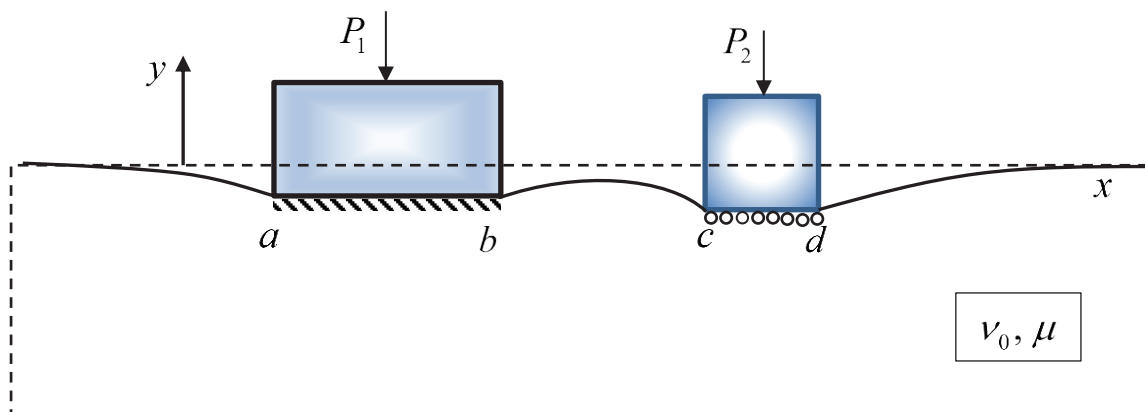


Рис. 1. Штампи  $a \leq x \leq b$  і  $c \leq x \leq d$  на межі  $y = 0$  ізотропної півплощини

**Комбінована крайова задача Діріхле-Римана.** Розв'язок задачі будемо шукати у формі Мусхелішвілі [10]:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (4)$$

$$2\mu(u' + iv') = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

де функція  $\Phi(z)$  є аналітичною в площині комплексної змінної  $z = x + iy$  з розрізами вздовж  $[a, b]$  та  $[c, d]$  і має в вузлових точках не більш ніж інтегровані особливості. Вважаючи відсутність напружень і обертання на нескінченності, маємо [10]:

$$\Phi(z) = i \frac{P_1 + P_2}{2\pi z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (6)$$

Рівняння (4), (5) при  $y \rightarrow -0$  приймають вигляд:

$$\sigma_y^- - i\tau_{xy}^- = \Phi^-(x) - \Phi^+(x), \quad (7)$$

$$2\mu(u' + iv')^- = \kappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x). \quad (8)$$



Із рівнянь (3) і (7) очевидно, що функція  $\Phi(z)$  не має стрибків при переході через частини границі півплощини поза штампами. Водночас задоволення граничним умовам (1) і (2) за допомогою (7) і (8) приводить до рівнянь

$$\Phi^+(x) + \kappa\Phi^-(x) = 0 \text{ для } a \leq x \leq b, \quad (9)$$

$$\operatorname{Im}[\Phi^-(x) - \Phi^+(x)] = 0, \quad \operatorname{Im}[\kappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x)] = 0 \text{ для } c \leq x \leq d. \quad (10)$$

Останні два рівняння можна записати у вигляді:

$$\operatorname{Im}\Phi^\pm(x) = 0 \text{ для } c \leq x \leq d. \quad (11)$$

Рівняння (9), (11) являють собою комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана відносно функції  $\Phi(z)$ . На основі [11] загальний розв'язок цієї задачі може бути записаний у вигляді:

$$\Phi(z) = R_1(z)X_1(z) + R_2(z)X_2(z), \quad (12)$$

де

$$R_1(z) = C_1z^2 + C_2z + C_3, \quad R_2(z) = D_1z + D_2. \quad (13)$$

$$X_1(z) = \frac{ie^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}, \quad X_2(z) = \frac{e^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \quad (14)$$

$$\varphi(z) = 2\gamma \ln \left[ \sqrt{\frac{z-a}{z-b}} \frac{\sqrt{(d-b)(z-c)} + \sqrt{(c-b)(z-d)}}{\sqrt{(d-a)(z-c)} + \sqrt{(c-a)(z-d)}} \right], \quad \gamma = \frac{\ln(\kappa)}{2\pi}. \quad (15)$$

При цьому  $X_1(z)$  має кореневі особливості при  $z=c$  та  $z=d$ , а  $X_2(z)$  обмежена і відмінна від нуля в точках  $z=c$  та  $z=d$ .

При  $z \rightarrow \infty$  з (14) і (15) отримаємо

$$\varphi(z) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (16)$$

$$X_1(z) = \frac{ie^{i\beta_0}}{z^2} \left[ 1 + \frac{1}{z} \left( i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^4}\right), \quad (17)$$

$$X_2(z) = \frac{e^{i\beta_0}}{z} \left[ 1 + \frac{1}{z} \left( i\beta_1 + \frac{a+b}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^3}\right), \quad (18)$$

$$\text{де } \beta_0 = 2\gamma \ln \left[ \frac{\sqrt{d-b} + \sqrt{c-b}}{\sqrt{d-a} + \sqrt{c-a}} \right], \quad \beta_1 = \gamma \left[ \sqrt{(c-a)(d-a)} - \sqrt{(c-b)(d-b)} \right].$$

**Знаходження невідомих коефіцієнтів.** Невідомі коефіцієнти  $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2$  можна знайти з умов на нескінченності та умов рівноваги штампів. Враховуючи, що при  $z \rightarrow \infty$  мають місце співвідношення (17), (18) отримаємо такий вираз для  $\Phi(z)$  на нескінченності:

$$\Phi(z) = ie^{i\beta_0} \left( C_1 + \frac{C_2}{z} + \frac{C_3}{z^2} \right) \left[ 1 + \frac{1}{z} \left( i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + e^{i\beta_0} \left( D_1 + \frac{D_2}{z} \right) \left[ 1 + \frac{1}{z} \left( i\beta_1 + \frac{a+b}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (19)$$

Прирівнюючи вирази при  $z^0$  та  $z^{-1}$  до відповідних складових правої частини (6), приходимо до такої системи двох лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів  $C_1, C_2, D_1, D_2$ :

$$\begin{cases} ie^{i\beta_0} C_1 + e^{i\beta_0} D_1 = 0, \\ ie^{i\beta_0} \left[ C_2 + C_1 \left( i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + e^{i\beta_0} \left[ D_2 + D_1 \left( i\beta_1 + \frac{a+b}{2} \right) \right] = i \frac{P_1 + P_2}{2\pi}. \end{cases} \quad (20)$$

З цієї системи отримуємо

$$C_1 = D_1 = 0, \quad C_2 = \frac{P_1 + P_2}{2\pi} \cos \beta_0, \quad D_2 = \frac{P_1 + P_2}{2\pi} \sin \beta_0. \quad (21)$$

З умови рівноваги штампа, що проковзує, маємо:

$$\int_c^d \sigma_y dx = P_2. \quad (22)$$

За формулою (7) на  $[c, d]$  маємо:

$$\sigma_y(x, 0) = \operatorname{Re}[\Phi^-(x) - \Phi^+(x)],$$

але, з урахуванням першого рівняння (10), можемо записати:

$$\sigma_y(x, 0) = \Phi^-(x) - \Phi^+(x). \quad (23)$$

Використовуючи далі представлення (12), отримуємо:

$$\Phi_1^-(x) - \Phi_1^+(x) = -R_1(x) \frac{e^{2\varphi_0(x)} + e^{-2\varphi_0(x)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(d-x)}} - \frac{1}{c} - R_2(x) \frac{e^{2\varphi_0(x)} - e^{-2\varphi_0(x)}}{\sqrt{(x-c)(x-a)}}, \quad (24)$$

де

$$\varphi_0(x) = \gamma \left( \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(c-a)(d-x)}}{\sqrt{(d-a)(x-c)}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(c-b)(d-x)}}{\sqrt{(d-b)(x-c)}} \right), \quad (25)$$

Комбінуючи (23), (24), і підставляючи в (22), отримуємо:

$$\int_c^d \left\{ \frac{(C_1x^2 + C_2x + C_3)(e^{2\varphi_0(x)} + e^{-2\varphi_0(x)})}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(d-x)}} + \frac{(D_1x + D_2)(e^{2\varphi_0(x)} - e^{-2\varphi_0(x)})}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \right\} dx = -P_2. \quad (26)$$

Невідомий коефіцієнт  $C_3$  може бути представлений у вигляді:

$$C_3 = -(Y_2 + C_1I_2 + C_2I_1 + D_1J_1 + D_2J_0) / I_0, \quad (27)$$

де інтеграли

$$I_k = \int_c^d \frac{x^k (e^{2\varphi_0(x)} + e^{-2\varphi_0(x)}) dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(d-x)}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$J_m = \int_c^d \frac{x^m (e^{2\varphi_0(x)} - e^{-2\varphi_0(x)}) dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}, \quad m = 0, 1,$$

можна легко знайти чисельно.

**Поведінка механічних факторів на границі півплощини.** Розглянемо поведінку механічних факторів на ділянках під штампамі та на вільних ділянках границі півплощини.

На основі формули (8) для  $x \notin \{[a, b] \cup [c, d]\}$  одержуємо таку формулу для похідних від переміщень:

$$2\mu(u'(x, 0) + iv'(x, 0)) = (1 + \kappa)\Phi^-(x).$$

Обчислюючи на основі формули (12) вирази для  $\Phi^-(x)$  на різних ділянках вільної поверхні границі півплощини, одержуємо для  $x > d \cup x < a$ :

$$u'(x, 0) + iv'(x, 0) = \frac{1 + \kappa}{2\mu} \left\{ P(x) \frac{ie^{i\varphi(x)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}} \left\{ \pm \right\} Q(z) \frac{e^{i\varphi(x)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \right\}. \quad (28)$$

При цьому знак «+» у внутрішніх дужках  $\{ \}$  береться для  $x > d$ , а «-» для  $x < a$ .

Для проміжку  $b < x < c$ :

$$2\mu(u'(x, 0) + iv'(x, 0)) = (\kappa + 1) \left[ \frac{e^{i\varphi_{bc}(x)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \left( \frac{-iP(x)}{\sqrt{(c-x)(d-x)}} + Q(x) \right) \right], \quad (29)$$

$$\text{де } \varphi_{bc}(x) = 2\gamma \ln \left[ \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} \frac{\sqrt{(d-b)(c-x)} + \sqrt{(c-b)(d-x)}}{\sqrt{(d-a)(c-x)} + \sqrt{(c-a)(d-x)}} \right]. \quad (30)$$

Нормальне і тангенціальне переміщення на різних ділянках границі отримані шляхом інтегрування формул (28) та (29).

Для обчислення напружень під зчепленим штампом на ділянці  $[a, b]$  використовуємо формулу (7), а також враховуємо, що

$$\Phi^-(x) = \kappa^{-1} \Phi^+(x) \text{ для } a \leq x \leq b.$$

У результаті отримуємо:

$$\sigma_y(x,0) - i\tau_{xy}(x,0) = \frac{2\sqrt{\alpha}e^{i\varphi^*(x)}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \left( \frac{P(x)}{\sqrt{(c-x)(d-x)}} + iQ(x) \right) \text{ для } a \leq x \leq b. \quad (31)$$

$$\text{де } \varphi^*(x) = 2\gamma \ln \left[ \frac{\sqrt{x-a} \sqrt{(d-b)(c-x)} + \sqrt{(c-b)(d-x)}}{\sqrt{b-x} \sqrt{(d-a)(c-x)} + \sqrt{(c-a)(d-x)}} \right]. \quad (32)$$

На ділянці контакту  $[c, d]$  штампу, що проковзує, враховуємо, що  $\tau_{xy}(x,0) = 0$  на цій ділянці. Тоді для нормального напруження для  $x \in [c, d]$  отримуємо:

$$\sigma_y(x,0) = \frac{-P(x)(e^{2\varphi_0(x)} + e^{-2\varphi_0(x)})}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(d-x)}} - \frac{Q(x)(e^{2\varphi_0(x)} - e^{-2\varphi_0(x)})}{\sqrt{(x-c)(x-a)}}. \quad (33)$$

Слід відзначити, що отримана формула добре узгоджується з виразом для нормального напруження під гладким штампом [11].

**Числові результати та їх аналіз.** Числові результати отримані для  $\mu = 8 \times 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\nu_0 = 0,3$  та при різних значеннях ширини штампів, відстаней між ними та величин зовнішнього навантаження.

На рис. 2 показано залежність вертикальних переміщень штампів від їхньої ширини, які знайдені при  $P_1 = -10^6 \text{ Н/м}$ ,  $P_2 = 10^6 \text{ Н/м}$ . Лінія I відповідає випадку двох однакових штампів  $a = -0,005 \text{ м}$ ,  $b = 0,015 \text{ м}$ ,  $c = 0,03 \text{ м}$ ,  $d = 0,05 \text{ м}$ , лінія II –  $a = -0,01 \text{ м}$ ,  $b = 0,01 \text{ м}$ ,  $c = 0,025 \text{ м}$ ,  $d = 0,055 \text{ м}$  (правий штамп є ширшим), лінія III –  $a = -0,01 \text{ м}$ ,  $b = 0,04 \text{ м}$ ,  $c = 0,055 \text{ м}$ ,  $d = 0,075 \text{ м}$  (лівий штамп є ширшим). Наведено тільки переміщення в околі штампів. На ділянках же, віддалених від точок  $a$  вліво і  $d$  вправо, зображені криві рівномірно продовжуються і сходяться до нульових значень по осі  $y$ .

На рис. 3 для тих же геометричних і силових параметрів, що на рис. 2, наведено графіки нормальних напружень під штампами. Видно, що зі збільшенням ширини штампів інтенсивність напружень зменшується.

На рис. 4 наведено графіки дотичних напружень під першим штампом. Видно, що напруження залишається сингулярним при підході до границь області контакту, але його величина зменшується порівняно з нормальним напруженням.

Розглянемо тепер залежність переміщень штампів від зусиль, які до них прикладено. Нехай геометричні характеристики штампів є фіксованими:  $a = -0,01 \text{ м}$ ,  $b = 0,01 \text{ м}$ ,  $c = 0,025 \text{ м}$ ,  $d = 0,045 \text{ м}$  (правий штамп є ширшим), відстань між штампями ( $c - b$ ) також є фіксованою.

На рис. 5 показано залежність вертикальних переміщень для трьох варіантів зовнішніх сил, прикладених до штампів. Лінія I відповідає випадку  $P_1 = -10^6 \text{ Н/м}$ ,  $P_2 = 10^6 \text{ Н/м}$ , лінія II –  $P_1 = P_2 = 0,25 \times 10^6 \text{ Н/м}$ , лінія III –  $P_1 = 0,5 \times 10^6 \text{ Н/м}$ ,  $P_2 = 10^5 \text{ Н/м}$ .

На рис. 6 показано залежність нормального напруження під правим штампом для трьох варіантів зовнішніх сил, прикладених до штампів, при  $a = -0,01 \text{ м}$ ,  $b = 0,01 \text{ м}$ ,  $c = 0,025 \text{ м}$ ,  $d = 0,055 \text{ м}$ . Лінія I відповідає випадку

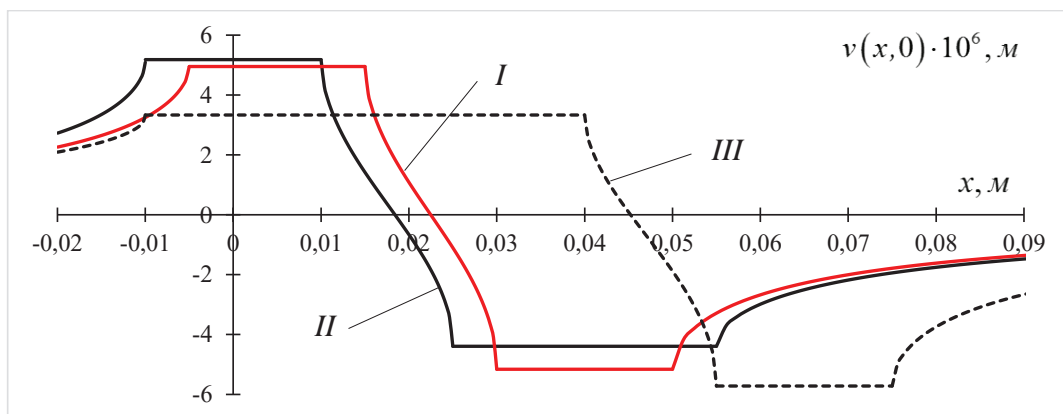


Рис. 2. Залежність вертикальних переміщень штампів від їхньої ширини

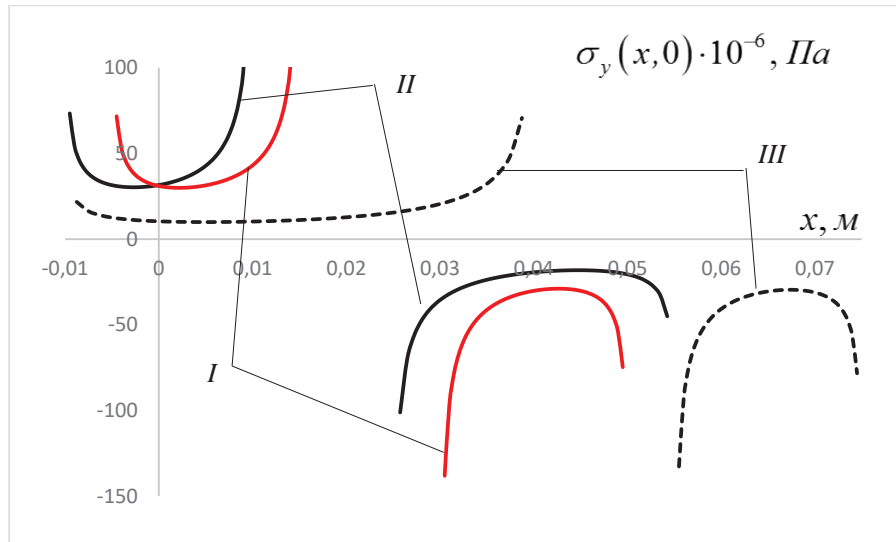


Рис. 3. Нормальні напруження під штампами

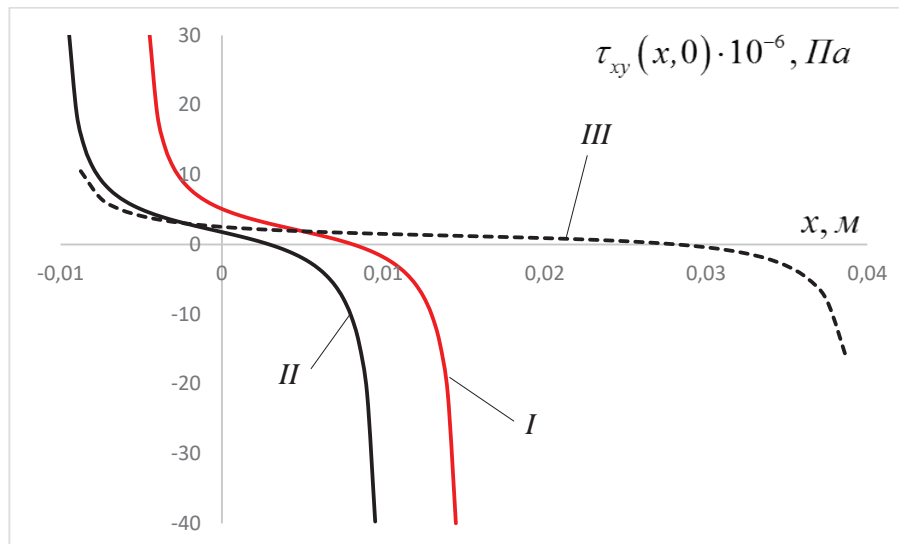


Рис. 4. Дотичні напруження під першим штампом

$P_1 = 10^6$  Н/м, лінія II –  $P_1 = 0,5 \times 10^6$  Н/м, лінія III –  $P_1 = 0$  Н/м. Сила  $P_2$ , що діє на правий штамп, у всіх трьох випадках вибиралась рівною  $0,5 \times 10^6$  Н/м. Видно, що величина сили, яка діє на лівий штамп, суттєво впливає на розподіл напружень під правим штампом особливо в частині області контакту, ближчій до лівого штамп. Важливо також відзначити, що графік зміни напруження для  $P_1 = 0$  Н/м (крива III) повністю співпадає з відповідним графіком для одного штамп, що діє без тертя на границю пружної півплощини [10, § 115].

**Висновки.** Розглянуто взаємодію двох штампів на границі пружної ізотропної півплощини під дією заданої системи сил. Вважається, що штампи мають плоскі основи, причому один із них жорстко зчеплений із півплощиною, а інший

знаходиться з нею в умовах гладкого контакту. Для розв'язання задачі використано представлення напружень і переміщень через кусково-аналітичні функції. Сформульовано комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана з відповідними умовами для невідомої функції на нескінченості. На основі аналітичного розв'язку цієї задачі знайдено похідні від переміщень границі півплощини та напруження під штампами в досить простому аналітичному вигляді. Показано, що розв'язок біля кутових точок жорстко зчепленого штамп має осцилюючу кореневу особливість, а біля кутових точок гладкого штамп – звичайну кореневу.

Одержано числові результати, які проілюстровано графічно. Зокрема, представлено графіки переміщень границі півплощини та проілюстровано варіацію напружень під штампами. Вияв-



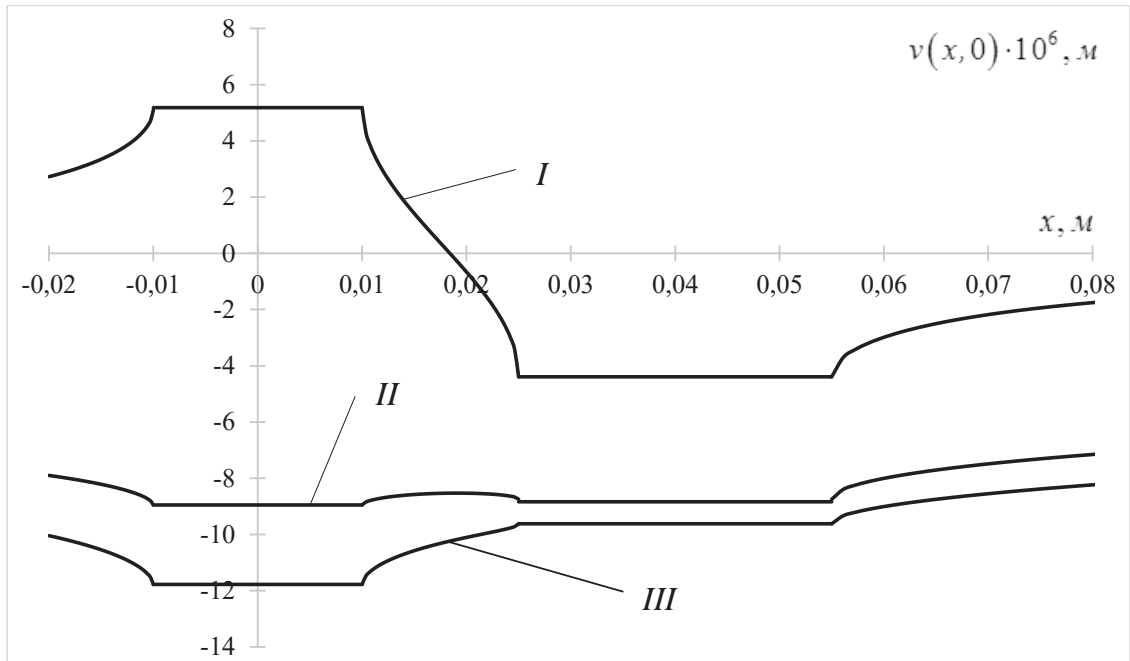


Рис. 5. Залежність вертикальних переміщень від прикладених до штампів зусиль

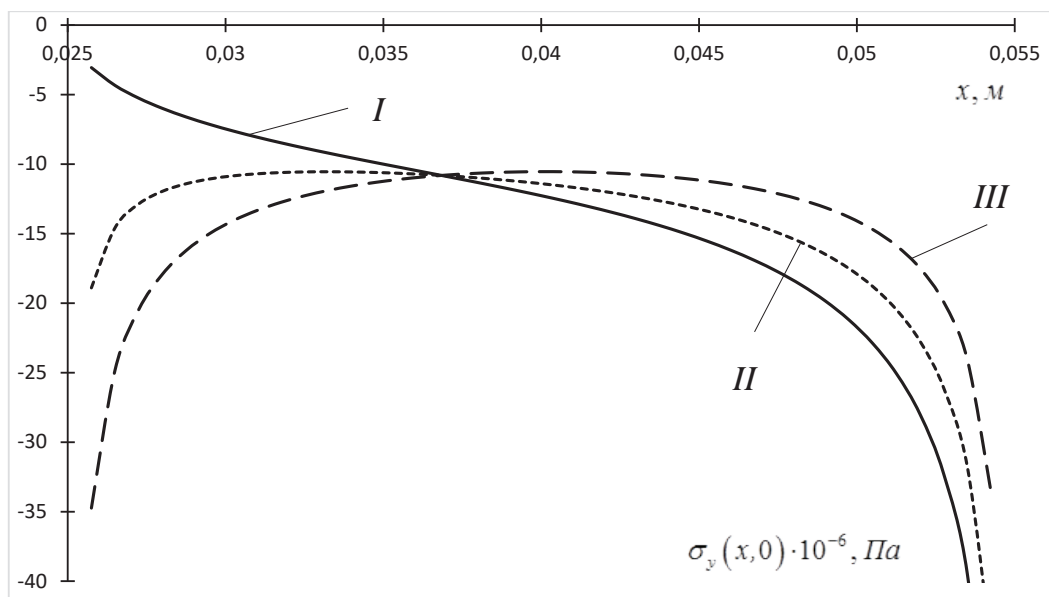


Рис. 6. Залежність нормального напруження під правим штампом для різних зовнішніх сил, прикладених до лівого штампу

лено, що зона повного затухання переміщень при віддаленні від штампів суттєво перевищує їхню ширину. Показано, що нормальне напруження під

жорстко зчепленим штампом є значно більшим, ніж дотичне, а осадка штампу зменшується зі збільшенням його ширини.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. Москва : Мир, 1989. 510 с.
2. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону : ООО «ЦВВР», 2007. 114 с.
3. Острик В.И. Контактна механіка. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2015. 560 с.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. Москва : Гостехиздат, 1953. 264 с.

5. Острик В.И. Контактное взаимодействие штампа с упругой полуплоскостью при наличии трения и сцепления. *Теор. и прикл. механика*. 2004. 39. С. 94–101.
6. Моссаковский В.И., Бискуп А.Г., Моссаковская Л.В. Дальнейшее развитие задачи Галина о трении и сцеплении. *Докл. АН УССР*. 1983. 271, № 1. С. 60–64.
7. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Дегтяр С.В. Аналіз впливу початкових напружень при взаємодії системи двох однакових штампів на півплощину під дією нормальної сили. *Наука III тисячоліття: пошуки, проблеми, перспективи розвитку: матеріали II Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (25-26 квітня 2018 року): збірник тез*. Бердянськ : БДПУ, 2018. Ч. 2. С. 23–24.
8. Сяський А.О., Трохимчук О.Я. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і системи штампів з кутовими точками. *Вісн. Нац. техн. ун-ту України «КПІ». Сер. Машинобудування*. 2010. Вип. 58. С. 36–41.
9. Кузьмінець М.П. Чисельний алгоритм моделювання процесу взаємодії двох плоских штампів з середовищем під час обтискування ґрунту під трубопроводом. *Управління проектами, системний аналіз і логістика*. Технічна серія. 2010. Вип. 7. С. 113–119.
10. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966. 707 с.
11. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М. Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом. *Прикладная математика и механика*. 1986. Т. 50(4). С. 663–673.

#### REFERENCES

1. Johnson K. (1989) *Mekhanika kontaktного vzaimodeystviya* [Mechanics of contact interaction]. M.: World. (in Russian)
2. Aleksandrov V.M., Chebakov M.I. (2007) *Vvedenie v mekhaniku kontaktnykh vzaimodeystviy* [Introduction to the mechanics of contact interactions]. Rostov-on-Don: LLC "CVVR". (in Russian)
3. Ostriк V.I. (2015) *Kontaktна mekhanika* [Contact mechanics]. K.: VPTs "Kyiv University". (in Ukrainian)
4. Galin L.A. (1953) *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti* [Contact problems of elasticity theory]. Moscow: Gostekhizdat. (in Russian)
5. Ostriк V. I. (2004) Kontaktное vzaimodeystvie shtampa s uprugoy poluploskost'yu pri nalichii treniya i stsepleniya [Contact interaction of a stamp with an elastic half-plane in the presence of friction and adhesion]. *Theor. and App. Mechanics*, vol. 39, pp. 94–101.
6. Mossakovsky V.I., Biskup A.G., Mossakovskaya L.V. (1983) Dal'neyshee razvitie zadachi Galina o trenii i stseplenii Dal'neyshee razvitie zadachi Galina o trenii i stseplenii [Further development of Galin's problem on friction and adhesion]. *Dokl. Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*, vol. 271, no. 1, pp. 60–64.
7. Babich S.Yu., Glukhov Yu.P., Degtyar S.V. (2018) Analiz vplyvu pochatkovykh napruzhenj pry vzajemodiji systemy dvokh odnakovykh shtampiv na pivploshhynu pid dijeju normal'noji syly [Analysis of the influence of initial stresses in the interaction of a system of two identical stamps on a half-plane under the action of normal force] *Proceedings of the II International scientific-practical Internet conference Science of the third millennium: research, problems, prospects (Berdyansk, April 25-26, 2018)*. Berdyansk: BSPU, part 2, pp. 23-24.
8. Syasky A.O., Trokhimchuk O.Ya. (2010) Mishana kontaktна задача dlja plastynky z kryvoliniynym otvorom i systemy shtampiv z kutovymy tochkamoy [Mixed contact problem for a plate with a curved hole and a system of stamps with angular points]. *Visn. Nat. tech. University of Ukraine "KPI". Ser. Engineering*, no. 58, pp. 36-41.
9. Kuzminets M.P. (2010) Chyselnyj alghorytm modeljuvannja procesu vzajemodiji dvokh ploskykh shtampiv z seredovyshhem pid chas obtyskuvannja ґрунту pid truboprovodom [Numerical algorithm for modeling the process of interaction of two flat stamps with the environment during soil compaction under the pipeline] *Project Management, Systems Analysis and Logistics. Technical series*, no.7, pp. 113-119.
10. Muskhelishvili N.I. (1966) *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka. (in Russian)
11. Nakhmein E.L., Nuller B.M. (1986) Kontakt uprugoy poluploskosti s chastichno otsloivshimsya shtampom [Contact of an elastic half-plane with a partially exfoliated stamp]. *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 50, no. 4, pp. 663–673.

## РОЗВ'ЯЗОК КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА ТА ШАРУ, ЩО ЛЕЖИТЬ БЕЗ ТЕРТЯ НА ОСНОВІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ

**Ярецька Н. О.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань  
Хмельницький національний університет  
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна  
[orcid.org/0000-0002-3726-2878](https://orcid.org/0000-0002-3726-2878)  
[iaretskan@gmail.com](mailto:iaretskan@gmail.com)*

**Ключові слова:** залишкові напруження, напружено-деформований стан, хімічно активна гума, лінеаризована теорія пружності, потенціал Трелоара.

Стаття присвячена розв'язку контактної задачі для попередньо напруженого циліндричного штампа та шару з початковими напруженнями. Шар лежить без тертя на основі без початкових напружень. Задачу розв'язано у випадку нерівних коренів визначального рівняння. Дослідження представлено у загальному виді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що початкові стани пружного циліндричного штампа, пружного шару та основи однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Крім того, вплив циліндричного штампа викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний циліндричний штамп та пружний шар виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів. Наведені загальні розв'язки основних диференціальних рівнянь лінеаризованої теорії пружності у випадку осесиметричної деформації для скінченної циліндричної області. У результаті розв'язки поставленої задачі представлені у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної квазірегулярної системи алгебраїчних рівнянь. Вивчено вплив початкових (залишкових) напружень у шарі, циліндрі та основі на розподіл контактних напружень в області контакту. У випадку нерівних коренів для хімічно активної гуми СКУ-6 та потенціалу Трелоара (тіло неогуківського типу) наведено результати чисельного аналізу, що подані у вигляді графіків, які ілюструють достатньо значний вплив початкових напружень. Отже, вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного циліндра, що втискається у пружний шар, який лежить без тертя на основі без початкових напружень, полягає в тому, що: початкові напруження в шарі призводять у випадку стиснення до зменшення напружень у пружному штампі, а у випадку розтягу – до їх збільшення, а для переміщень – навпаки.

## THE SOLUTION OF A CONTACT PROBLEM FOR A PRE-STRESSED CYLINDRICAL STAMP AND A LAYER WHICH IS LYING ON THE BASE WITHOUT FRICTION AND WITHOUT INITIAL STRESSES

**Yaretska N. O.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Computer Applications  
Khmelnytskyi National University  
Institutska str., 11, Khmelnytskyi, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-3726-2878  
iaretskan@gmail.com*

**Key words:** *residual stresses, stress-strain state, chemically active rubber, linearized theory of elasticity, Treloir potential.*

The article is devoted to the study of the contact problem for a pre-stressed cylindrical stamp and a layer with initial stresses. The layer is lying without friction on the base without initial stresses. The initial stresses are absent at the base. The problem is solved in the case of unequal roots of the defining equation. The study is presented in general for the theory of large initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of elastic potential. It is assumed that the initial states of the elastic cylindrical punch and the layer and the base are homogeneous and equal. The study is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are associated with Lagrangian coordinates (natural state). In addition, the influence of the cylindrical punch causes small perturbations of the corresponding values of the basic stress-strain state. It is also assumed that the elastic cylindrical punch and the elastic layer and base are made of different isotropic, transversely isotropic or composite materials. The general solutions of the basic differential equations of the linearized theory of elasticity in the case of axisymmetric deformation for a finite cylindrical domain are given. As a result, the problem is presented in the form of infinite series. The coefficients of this series are determined from an infinite quasi-regular system of algebraic equations. The influence of initial stresses in the layer and the cylinder punch and the base on the distribution of contact stresses in the contact region is studied. In the case of unequal roots for the chemically active rubber of UWC-6 and the Treloar potential (Neogukov type body) the results of numerical analysis are given. This results are presented in the form of graphs. It is illustrate a fairly significant effect of the initial stresses. So, influence of initial stresses on the stress-strain state of an elastic cylinder punch, is that the initial stress in the layer in the case of compression reduce the stress in the elastic punch, and in the case of stretching increase it.

**Вступ.** Наукові дослідження проблеми контактної взаємодії пружних тіл постійно збільшуються і вдосконалюються, враховуючи розвиток сучасних інформаційних технологій та математичних методів. Це зумовлено актуальністю використання результатів таких досліджень під час будівництва споруд, виробництва та конструювання деталей машин та їх конструкцій.

Урахування початкових напружень під час дослідження контактних задач значно ускладнює математичний розв'язок, але водночас наближає його до реальних процесів, які підлягають дослідженню.

Тематика дослідження контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями також є актуальною і для фундаментальних досліджень з механіки твердого деформованого тіла.

Ураховуючи вищесказане, дана робота присвячена дослідженню питання контактної взаємодії попередньо напруженого циліндричного штамп з попередньо напруженим шаром, що лежить без тертя на основі (півпросторі) без початкових напружень.

Об'єктом даного дослідження є процес контактної взаємодії пружного циліндричного штамп з початковими (залишковими) напруженнями та

шару з початковими (залишковими) напруженнями, що лежить без тертя на основі без початкових напружень.

Предметом дослідження є вплив початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень пружних тіл.

Метою роботи є розв'язок вісесиметричної статичної задачі про контактну взаємодію пружного циліндричного штампа з початковими напруженнями на пружний шар з початковими напруженнями, що лежить без тертя на основі без початкових напружень. Дослідження проведено в межах лінеаризованої теорії пружності в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

**Огляд літератури.** Останнім часом наукові результати, що мають відношення до механіки твердих деформованих тіл та їх контактної взаємодії, охоплюють все ширші кола питань. Ці результати представлені багатьма працями монографічного та оглядового характеру, одними з яких є [1–3]. У праці [1] в межах лінеаризованої теорії пружності розглянуто контактну задачу для пружного циліндричного штампа та шару з початковими напруженнями, що лежить на жорсткій основі без тертя. У монографії [2] представлені методи розв'язку мішаних задач для пружної основи (півпростору) з початковими напруженнями. В оглядовій статті [3] академіком О.М. Гузем висвітлено проблеми неklasичної механіки руйнування, що дає поштовх для вдосконалення та подальшого розвитку наукових досліджень з теорії механіки твердих деформованих тіл.

Існує також ряд узагальнюючих публікацій [4–8], які повністю або частково пов'язані з тематикою даної статті. Так у статті [4] у межах тривимірної теорії пружності представлено розв'язок динамічної контактної задачі про взаємодію пружного стисливого півпростору та шару стисливої рідини, враховуючи вплив початкових напружень. Динамічна задача дослідження стійкості циліндричної оболонки при зовнішньому та внутрішньому стиску представлена працею [5]. Контактну задачу про тиск циліндра на шар, враховуючи їх поверхневі особливості розглянуто у [6]. Приклад чисельного розв'язку контактних задач подано у статті [7]. Метод аналітичного та чисельного розв'язку двох статичних контактних задач про тиск кільцевих пружних штампів на пружний півпростір представлено у праці [8].

Дослідження контактної взаємодії жорстких і пружних штампів із попередньо напруженими тілами в рамках лінеаризованої теорії пружності представлені статтями [9–14].

Так, у статті [9] розглянуто розв'язок вісесиметричної контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа на попередньо напружений півпростір. Вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружних кільцевого штампа та півпростору представлено в роботі [10]. Розв'язок контактної задачі про тиск пружних співвісних циліндричних штампів на пружний шар, у якому є залишкові деформації розглянуто у [11; 12].

Також, враховуючи необхідність підвищення міцності конструкції за рахунок підсилення її деяких несних елементів пружними стрингерами, пропонуються для ознайомлення дослідження, подані у працях [13; 14].

**Методи дослідження.** Використаємо співвідношення лінеаризованої теорії пружності [1; 2], причому дослідження представимо в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Будемо розрізняти три стани попередньо напружених тіл: а) природний (відсутність напружень); б) початковий стан; в) збурений стан (всі величини якого складаються з суми відповідних величин початкового стану та збурень). До того ж збурення вважаємо набагато меншими від відповідних величин початкового стану.

Для розв'язку задачі застосуємо координати початкового деформованого стану  $(y_1, y_2, y_3)$ , які пов'язані з лагранжевими координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  співвідношеннями:  $y_i = \lambda_i x_i$ , де  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) – коефіцієнт видовження вздовж координатної осі. Вісь  $y_3$  спрямуємо по нормалі до області контакту.

Припустимо, що пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [2], а початковий деформований стан є однорідним. Нехай зона контакту пружних тіл буде міститися у площині  $y_3 = const$ . Вважатимемо, що початкові напруження діють вздовж зони контакту.

Матеріали тіл будемо вважати ізотропними стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу.

Усі величини, які відносяться до пружного циліндричного штампа, ми будемо позначати верхнім індексом «(1)», до шару – «(2)», а основи – «(3)».

Отже, сформулюємо постановку задачі. Нехай скінченний пружний циліндричний штамп радіуса  $R$  і висотою  $H$  з початковими напруженнями втискається у пружний шар під дією сили  $P$  після виникнення там початкового деформованого стану. Причому шар лежить без тертя на основі без початкових напружень. Товщина шару в початковому деформованому стані пов'язана з товщиною у недеформованому стані співвідношенням  $h_1 = \lambda_3 h_2$ . Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки



до вільного торця пружного штамп, під дією якого всі точки штамп переміщуються у напрямку осі симетрії  $y_3$  на одну і ту ж саму величину  $\varepsilon$ . Зробимо припущення, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту тертя вважаємо відсутнім. До того ж переміщення та напруження – неперервні.

Враховуючи однорідність початкового стану тіл, запишемо співвідношення:

$$y_m = \lambda_m x_m, \quad \lambda_m = const,$$

$$y_m = x_m + U_m^0, \quad U_m^0 = \delta_{mi} (\lambda_m - 1) x_i \quad (i, m = \overline{1,3}) \quad (1)$$

де  $\delta_{mi}$  – символ Кронекера.

З виразів (1) для узагальнених початкових напружень маємо

$$S_{im}^0 = \delta_{im} S_{mm}^0 \quad S_{mm}^0 = const \quad (m, i = \overline{1,3})$$

Основні рівняння для стисливих тіл у системі координат  $(y_1, y_2, y_3)$  мають вигляд

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0,$$

$$L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_j \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1,2,3}) \quad (2)$$

Для нестисливих тіл основне рівняння та умова нестисливості представлені співвідношеннями:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{\alpha m} \partial / \partial y_\alpha p' = 0,$$

$$q'_{\alpha m} \partial U_\alpha / \partial y_m = 0, \quad q'_{\alpha m} = \lambda_\alpha q_{\alpha m},$$

$$L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_j \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1,2,3}) \quad (3)$$

Вирази для компонент тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл при  $y_i = const$  ( $i = \overline{1,2,3}$ ) матимуть вигляд

$$Q'_{ij} = \begin{cases} \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} - \text{для стисливих тіл,} \\ \kappa'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij} p' - \text{для нестисливих тіл,} \end{cases}$$

$$\omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta},$$

$$\kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta},$$

де  $\omega'_{im\alpha\beta} = \omega'_{im\alpha\beta} (S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$ ,  $\kappa'_{im\alpha\beta} = \kappa'_{im\alpha\beta} (S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$  – складові тензора модулів пружності четвертого порядку.

Крім того, дія циліндра викликати у шарі невелике збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$$

$$\tilde{\chi} = 0, 5\varepsilon \left\{ \theta_8^{-1} (r^2 - z_1^2 - z_2^2) - \chi_0 \left[ r^2 (\theta_8^{-1} + (2H\theta_6)^{-1} (z_1 + z_2)) - \theta_8^{-1} (z_1^2 + z_2^2) - (2H\theta_6)^{-1} (z_1^3 + z_2^3) \right] \right\} - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) + I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] - J_0(\alpha_k r) \left[ \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) \right] \right\} \chi_k \quad (12)$$

Де  $J_\nu(x)$ ,  $I_\nu(x)$  – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу,

У циліндричних координатах  $(r, \theta, z_i)$  представимо розв'язки рівнянь (2) – (3) у вигляді

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_2^2) (\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \chi = 0, \quad (4)$$

$$\text{де } \Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r.$$

Ураховуючи умову існування єдиного розв'язку лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл [2], можливі два варіанти представлення загального розв'язку (4): випадок рівних коренів ( $\xi_2'^2 = \xi_3'^2$ ) та випадок нерівних коренів ( $\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2$ ). У даній статті зупинимося на випадку нерівних коренів.

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2, \quad (\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi}_1 = 0,$$

$$(\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi}_2 = 0. \quad (5)$$

У системі циліндричних координат, при  $n_1 = \xi_2'^2$ ,  $n_2 = \xi_3'^2$ ,  $z_i = v_i^{-1} y_3$ ,  $v_i = \sqrt{n_i}$ , ( $i = \overline{1,2}$ ), такий постановці відповідають граничні умови:

1) на торці пружного штамп:

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (6)$$

2) на межі пружного шару в області контакту  $z_i = 0$  ( $i = \overline{1,2}$ ):

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)} \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (7)$$

3) на межі пружного шару поза областю контакту  $z_i = 0$  ( $i = \overline{1,2}$ ):

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R \leq r < \infty); \quad (8)$$

4) на бічній поверхні пружного штамп  $r = R$ :

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq z_i \leq \frac{H}{v_i}). \quad (9)$$

5) на нижній поверхні шару, що лежить на основі без початкових напружень,  $z_i = -\lambda_3 h_2 v_i^{-1} = -H v_i^{-1}$ , ( $i = \overline{1,2}$ ):

$$u_3^{(2)} = u_3^{(3)}, \quad Q_{3r}^{(3)} = Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r < \infty) \quad (10)$$

де  $z_i = y_3 v_i^{-1}$ , ( $i = \overline{1,2}$ ) товщина шару в недеформованому стані.

Умова рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням торця і рівнодіючою навантаження  $P$ , буде мати вигляд

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho Q_{33}^{(2)}(0, \rho) d\rho. \quad (11)$$

Для визначення напружено-деформівного стану в попередньо напруженому циліндричному штампі для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$  загальний розв'язок (5) визначального рівняння (4) представимо у вигляді:

$$b_3^{(k)} = 4\epsilon R^2 J_0(\mu_k) \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{\mu_k^2 + (\gamma_k v_1 R)^2} - \frac{v_2}{v_1 s_0} \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{\mu_k^2 + (\gamma_k v_2 R)^2} \right] (v_1 H \gamma_k^3 I_1(\gamma_k v_2 R) [v_2 W_k(2) - v_1 s_0 W_k(1)])^{-1},$$

$$W_k(m) = (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_m) I_0(\gamma_k v_m R) (I_1(\gamma_k v_m R))^{-1} + 1 - \tilde{c}_0 (\gamma_k v_m R)^{-1}, \quad (m=1,2),$$

$$\theta_8 = m_1 n_1^{-1} + m_2 n_2^{-1}, \quad \theta_6 = m_1 v_1^{-3} + m_2 v_2^{-3}.$$

$$\tilde{c}_0 = \begin{cases} \omega'_{1111} \omega'_{1122}{}^{-1}; \\ \lambda_1 q_1 (\lambda_3 q_3)^{-1} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}) \kappa'_{1122}{}^{-1}; \end{cases} \quad \tilde{c}_i = \begin{cases} \lambda_3 \omega'_{1133} m_i \omega'_{1122} n_i^{-1}; \\ (\kappa'_{1133} m_i - \kappa'_{3113}) \kappa'_{1122} n_i^{-1}; \end{cases} \quad (i = \overline{1,2}) \quad s_0 = \frac{1 + m_2}{1 + m_1},$$

$$m_i = \begin{cases} (\omega'_{1111} n_i - \omega'_{3113}) (\omega'_{1133} + \omega'_{1313})^{-1}; \\ \lambda_1 q_1 (\lambda_3 q_3)^{-1} n_i; \end{cases} \quad (i = \overline{1,2})$$

$$\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) = R^2 \epsilon \mu_k^{-2} [ch(\alpha_k z_1) - cth(\mu_k l v_1^{-1}) sh(\alpha_k z_1)], \quad \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) = R^2 \epsilon \mu_k^{-2} [sh(\alpha_k z_1) - cth(\mu_k l v_1^{-1}) ch(\alpha_k z_1)],$$

$$\tilde{S}_3(\alpha_k z_2) = \frac{n_2 R^2 \epsilon}{n_1 \mu_k^2 s_0} [cth(\mu_k l v_2^{-1}) sh(\alpha_k z_2) - ch(\alpha_k z_2)], \quad \tilde{S}_5(\alpha_k z_2) = \frac{n_2 R^2 \epsilon}{n_1 \mu_k^2 s_0} [cth(\mu_k l v_2^{-1}) ch(\alpha_k z_2) - sh(\alpha_k z_2)].$$

Тоді співвідношення для компонент вектора переміщення і тензора напруження для циліндричного штампя для  $n_1 \neq n_2$  представимо у вигляді:

$$U_r^{(1)} = \epsilon \theta_+ r (2H\theta_6)^{-1} \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 b_3^{(k)} \left[ s_0 I_1(\gamma_k v_2 R) (I_1(\gamma_k v_1 R))^{-1} v_1 I_1(v_1 \gamma_k r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) - v_2 I_1(v_2 \gamma_k r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \alpha_k^2 J_1(\alpha_k r) (\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) v_1^{-1} + \tilde{S}_5(\alpha_k z_2) v_2^{-1}) \right\} \chi_k$$

$$U_3^{(1)} = -\epsilon \left\{ 1 + \chi_0 \left[ \frac{1}{H\theta_6} \left( \frac{m_1 z_1}{n_1} + \frac{m_2 z_2}{n_2} \right) - 1 \right] \right\} - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} m_1 I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) - m_2 I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \alpha_k^2 J_0(\alpha_k r) \left( \frac{m_1 \tilde{S}_2(\alpha_k z_1)}{n_1} + \frac{m_2 \tilde{S}_3(\alpha_k z_2)}{n_2} \right) \right\} \chi_k$$

$$Q_{33}^{(1)} = C_{44} (1 + m_1) l_1 \left\langle -\frac{\epsilon}{H\theta_6} \chi_0 \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] - \right. \tag{13}$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} n_1 I_0(\gamma_k v_1 r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) - s n_2 I_0(\gamma_k v_2 r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \alpha_k^3 J_0(\alpha_k r) \left( \frac{\tilde{S}_4(\alpha_k z_1)}{v_1} + \frac{s \tilde{S}_5(\alpha_k z_2)}{v_2} \right) \right\} \chi_k \right\rangle$$

$$Q_{3r}^{(1)} = C_{44} (1 + m_1) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ s_0 \gamma_k^3 b_3^{(k)} \left[ v_2 I_1(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) - v_1 I_1(\gamma_k v_2 R) (I_1(\gamma_k v_1 R))^{-1} I_1(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) \right] + \alpha_k^3 J_1(\alpha_k r) \left[ n_1^{-1} \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + s_0 n_2^{-1} \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) \right] \right\} \chi_k$$

Де  $\theta_+ = v_1^{-1} + v_2^{-1}$ ,  $C_{44} = \begin{cases} w'_{1313}, & s = s_0 l_2 l_1^{-1}, \\ \kappa'_{1313}. \end{cases}$   $\chi_k$  – шукані константи,

$$l_i = \begin{cases} \omega'_{1331} \omega'_{1313}{}^{-1} + \omega'_{1313} (\omega'_{1313} - \omega'_{1331}) (\omega'_{1133} + \omega'_{1313}) (\omega'_{1111} n_1 + \omega'_{1133})^{-1} \\ \kappa'_{1331} \kappa'_{1313}{}^{-1} + \kappa'_{1313} (\kappa'_{1313} - \kappa'_{1331}) (\lambda_3 q_3) (\lambda_3 q_3 + \lambda_1 q_1 n_1)^{-1} \end{cases}$$

Напружено-деформований стан у пружному шарі з початковими напруженнями визначимо через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля, які після ряду перетворень виражаються через нескінченну систему констант  $\chi_k$  [1, с. 60–80].

Напружено-деформований стан основи без початкових напружень з [1] матиме вигляд:

$$u_r^{(3)} = \frac{2\epsilon}{\pi\theta_3} \hat{T}^4 \left( \Omega^8; S_1^0; \frac{y_3}{R}; A_2'; A_3'; 1; \frac{\lambda + \mu}{\mu R} (h_1 + y_3); 1 \right), \quad u_3^{(3)} = \frac{2\epsilon}{\pi\theta_3} \hat{T}^4 \left( \Omega^8; S_1^0; \frac{y_3}{R}; A_2'; A_3'; \frac{2\mu - \lambda}{\mu}; \frac{\lambda + \mu}{\mu R} (h_1 + y_3); 1 \right),$$

$$Q_{33}^{(3)} = \frac{4\epsilon(\mu + \lambda)}{\pi\theta_3 R} \hat{T}^4 \left( \Omega^8; S_2^0; \frac{y_3}{R}; A_2'; A_3'; 1; \frac{h_1 + y_3}{R}; 1 \right), \quad Q_{3r}^{(3)} = \frac{4\epsilon(\lambda + \mu)}{\pi\theta_3 R^2} (h_1 + y_3) \hat{T}^4 \left( \Omega^8; S_3^1; \frac{y_3}{R}; A_2'; A_3'; 1; 0; 1 \right) \tag{14}$$

Де  $\hat{T}^4(\Omega^n; S_m^n; \bar{\alpha}; \bar{\beta}_1; \bar{\beta}_2; l_1; l_2; \theta) = \bar{\beta}_1 \left\langle (1 - a_0) \left[ l_1 \Omega^n(S_m^n; \bar{\alpha}; 0) + l_2 \Omega^n(S_{m+1}^n; \bar{\alpha}; 0) \right] - \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left[ l_1 \Omega^n(S_m^n; \bar{\alpha}; k_i) + \right. \right.$   
 $+ l_2 \Omega^n(S_{m+1}^n; \bar{\alpha}; k_i) \left. \right] \rangle + \bar{\beta}_2 \left\langle (1 - a_0) \left[ l_1 \Omega^n(S_m^n; \bar{\alpha}; \theta) + l_2 \Omega^n(S_{m+1}^n; \bar{\alpha}; \theta) \right] - \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left[ l_1 \Omega^n(S_m^n; \bar{\alpha}; k_i + \theta) + \right. \right.$   
 $+ l_2 \Omega^n(S_{m+1}^n; \bar{\alpha}; k_i + \theta) \left. \right] \rangle, \quad \Omega^8(\hat{L}_m, \alpha, \theta) = (\chi_0 - 1) \hat{L}_m(\rho, \alpha - \theta) + \frac{\theta_3}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^* \hat{L}_{j+m}(\rho, \alpha - \theta),$

$$A_2' = \frac{h_1}{R} \left\{ \frac{2(s_2 - s_3)(s_3(sh\tilde{\varphi}_2 - v_2^{-1}ch\tilde{\varphi}_2) - s(sh\tilde{\varphi}_1 - v_1^{-1}ch\tilde{\varphi}_1))}{\alpha((s_3 - s)sh\tilde{\varphi}^+ + (s + s_3)sh\tilde{\varphi}^-) + (s_2 - s_3)\beta(ch\tilde{\varphi}^+ - ch\tilde{\varphi}^-)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(s_2 - s_3)(s_3sh\tilde{\varphi}_2 - s \cdot sh\tilde{\varphi}_1) [\alpha((s_3 - s)\theta^+ch\tilde{\varphi}^+ + (s + s_3)\theta^-ch\tilde{\varphi}^-) + (s_2 - s_3)\beta(\theta^+sh\tilde{\varphi}^+ - \theta^-sh\tilde{\varphi}^-)]}{(\alpha((s_3 - s)sh\tilde{\varphi}^+ + (s + s_3)sh\tilde{\varphi}^-) + (s_2 - s_3)\beta(ch\tilde{\varphi}^+ - ch\tilde{\varphi}^-))^2} \right\},$$

$$\lambda, \mu - \text{сталі Ляме, } A_3' = \frac{h_1}{eR} \left\{ \frac{2(s_2 - s_3)(s_3v_2^{-1}ch\tilde{\varphi}_2 - s \cdot v_1^{-1}chch\tilde{\varphi}_1)}{\alpha((s_3 - s)sh\tilde{\varphi}^+ + (s + s_3)sh\tilde{\varphi}^-) + (s_2 - s_3)\beta(ch\tilde{\varphi}^+ - ch\tilde{\varphi}^-)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(s_2 - s_3)(s_3sh\tilde{\varphi}_2 - s \cdot sh\tilde{\varphi}_1) [\alpha((s_3 - s)\theta^+ch\tilde{\varphi}^+ + (s + s_3)\theta^-ch\tilde{\varphi}^-) - (s_2 - s_3)\beta(\theta^+sh\tilde{\varphi}^+ - \theta^-sh\tilde{\varphi}^-)]}{(\alpha((s_3 - s)sh\tilde{\varphi}^+ + (s + s_3)sh\tilde{\varphi}^-) + (s_2 - s_3)\beta(ch\tilde{\varphi}^+ - ch\tilde{\varphi}^-))^2} \right\}$$

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{h_i}{Rv_i}, \quad (i = 1, 2), \quad \tilde{\varphi}^{\pm} = \frac{h_1\theta^{\pm}}{R}, \quad \tilde{\varphi}_2^{\pm} = \frac{h_1\theta_2^{\pm}}{R}, \quad \theta^{\pm} = v_1^{-1} \pm v_2^{-1}. \quad S_n^m(\rho; z) = \int_0^{\infty} \eta^{-2} \sin \eta e^{-z\eta} J_m(\eta\rho) d\eta,$$

$\hat{L}_m^n(t, 0, u) = \hat{L}_m^n(t, u)$ ,  $k_i, a_i$  – константи розкладу  $D_n = \int_0^{\infty} t^n G(t) dt$ . через гамма-функції ( $i=0, 1, 2, \dots$ ),

$$\alpha = (2\mu^{(3)} + \lambda^{(3)})(m_1^{(2)}\mu^{(3)})^{-1}v_1, \quad k = k_1 = 1, \quad \beta = 2(\mu^{(3)} + \lambda^{(3)})(C_{44}^{(2)}(1 + m_1^{(2)})l_1^{(2)})^{-1}, \quad h = h_1 / R, \quad \varphi_i = 2\eta h v_i^{-1},$$

$$\theta_3 = m_1(s_1 - s_0)v_1^{-1}, \quad s_2 = m_2v_1(m_1v_2)^{-1}, \quad s_3 = s_0v_1v_2^{-1}, \quad C_i^* - \text{коєфіцієнти розкладу в ряд функції}$$

$F(\eta) = F(\eta, G(\eta))$  за степенями  $\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)$ , що є складовою компонент вектора напружень та переміщень для пружного шару, причому  $G(\eta h) = ((s_2 - s_3)(s - s_3)\beta k - s\alpha k_1)sh(\eta h\theta_+) +$   
 $+ ((s_2 - s_3)(s + s_3)\beta k + s\alpha k_1)sh(\eta h\theta_-) + ((s - s_3)^2 + s_3)\alpha k_1 - \beta k(s_2 - s_3)ch(\eta h\theta_+) - ((s^2 - s_3^2) - s_3)\alpha k_1 -$   
 $- \beta k(s_2 - s_3)ch(\eta h\theta_-) + 2s \cdot s_3\alpha k_1 P(\eta h), \quad \kappa = 1, \quad P(\eta h) = 2s \cdot s_3\alpha k_1 + \beta k((s_2 - s_3)(s - s_3)sh(\eta h\theta_+) +$   
 $+ (s_2 - s_3)(s + s_3)sh(\eta h\theta_-)) - \alpha k_1((s - s_1)^2 ch(\eta h\theta_+) + (s^2 - s_3^2)ch(\eta h\theta_-)).$

Використовуючи розв'язки для циліндра (12), і задовольнивши третю умову (7) та другу умову (9), знайдемо власні значення задачі (6) – (11) для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$ :

$$\gamma_k = \frac{\pi(2k + 1)}{H}, \quad J_1(\mu_k) = 0, \quad \text{де } J_1(\mu_k) = 0. \quad (15)$$

Для розв'язку задачі визначимо сталі  $\chi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathfrak{D}_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{D}_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Наближене обчислення коєфіцієнтів системи, враховуючи складність функцій  $G_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ), можна представити у вигляді

$$\mathfrak{D}_0 = \varpi_0 = 2\pi^{-1} \left[ 1 + 2\pi^{-1} \left\{ D_0 h^{-1} - h^{-2} (D_2/3 - 2D_0^2 \pi^{-1}) (h + 2D_0 \pi^{-1}) - D_0 D_2 (3\pi^2 h^4)^{-1} (\pi + 4D_0) + 2(3h^5)^{-1} (D_4/5 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + D_2^2 (6\pi)^{-1} - D_2 D_0^2 \pi^{-2} \right) + D_0 (18\pi h^6)^{-1} (11D_4 + 4D_2^2 \pi^{-1}) - (15h^7)^{-1} (D_6/21 + D_2 D_4 (12\pi)^{-1} - 19D_4 D_0^2 (6\pi^2)^{-1}) + \dots \right];$$

$$\mathfrak{D}_{0n} = 2\pi^{-1} \left[ -\theta_4 \psi_0(0, \mu_n) + 2\pi^{-1} \left\{ D_0 h^{-1} r_1(\mu_n) + 4D_0^2 (\pi h^2)^{-1} r_1^2(\mu_n) + h^{-3} (4D_0^3 \pi^{-2} r_1^3(\mu_n) - D_2 (3\mu_n^3)^{-1} r_2(\mu_n)) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2D_0 D_2 (3\pi \mu_n^3 h^4)^{-1} r_1(\mu_n) (3r_5(\mu_n) - 2r_2(\mu_n)) + (3h^5 \mu_n^3)^{-1} (D_4 \mu_n^{-2} r_3(\mu_n) + 2D_2 D_0^2 \pi^{-1} r_1^2(\mu_n) (3r_5(\mu_n) - r_2(\mu_n))) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+2(3\pi\mu_n^5 h^6)^{-1} \left( D_0 D_4 / 8 r_1(\mu_n)(16r_3(\mu_n) + 3r_6(\mu_n)) - D_2^2 \mu_n^{-1} r_2(\mu_n) r_5(\mu_n) \right) + \\
 &+(3\mu_n^5 h^7)^{-1} \left( D_0 \pi^{-2} r_1(\mu_n) \left( 4D_0 D_4 / 3 r_1(\mu_n)(3r_3(\mu_n) + r_6(\mu_n)) + D_2^2 \mu_n^{-1} r_5(\mu_n)(3r_5(\mu_n) - 4r_2(\mu_n)) \right) - \right. \\
 &\left. - D_6(168\mu_n^2)^{-1} (21\mu_n^4 r_5(\mu_n) - 7r_7(\mu_n) - 35\mu_n^2 r_6(\mu_n) - \mu_n^7 r_1(\mu_n)) + \dots \right), \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{G}_k = \theta_3 \mu_k J_0^2(\mu_k) (2\kappa R v_1)^{-1} \left[ l_2 v_2 (l_1 v_1)^{-1} \text{cth}(\mu_k l v_2^{-1}) - \text{cth}(\mu_k l v_1^{-1}) \right]; \quad \mathfrak{G}_{00} = \theta_5 \theta_3 R E(\kappa l)^{-1};$$

$$\begin{aligned}
 \varpi_k &= 2\pi^{-1} \left[ \psi_0(0, \mu_k) + 2\pi^{-1} \left\{ D_0 h^{-1} r_1(\mu_k) + 4D_0^2 (\pi h^2)^{-1} r_1^2(\mu_k) + h^{-3} \left( 4D_0^3 \pi^{-2} r_1^3(\mu_k) - D_2(3\mu_k^3)^{-1} r_2(\mu_k) \right) + \right. \right. \\
 &+ 2D_0 D_2 (3\pi\mu_k^3 h^4)^{-1} r_1(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 2r_2(\mu_k)) + (3h^5 \mu_k^3)^{-1} \left( D_4 \mu_k^{-2} r_3(\mu_k) + 2D_2 D_0^2 \pi^{-1} r_1^2(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - r_2(\mu_k)) \right) + \\
 &\left. + 2(3\pi\mu_k^5 h^6)^{-1} \left( D_0 D_4 / 8 r_1(\mu_k)(16r_3(\mu_k) + 3r_6(\mu_k)) - D_2^2 \mu_k^{-1} r_2(\mu_k) r_5(\mu_k) \right) + (3\mu_k^5 h^7)^{-1} \times \right. \\
 &\left. \times \left( D_0 \pi^{-2} r_1(\mu_k) \left( 4D_0 D_4 / 3 r_1(\mu_k)(3r_3(\mu_k) + r_6(\mu_k)) + D_2^2 \mu_k^{-1} r_5(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 4r_2(\mu_k)) \right) - D_6(5\mu_k^2)^{-1} r_4(\mu_k) + \dots \right) \right] \\
 \mathfrak{G}_{k0} &= 2\pi^{-1} \left[ -\theta_4 \psi_0(0, \mu_k) + 2\pi^{-1} \left\{ D_0 h^{-1} r_1(\mu_k) + 4D_0^2 (\pi h^2)^{-1} r_1^2(\mu_k) + h^{-3} \left( 4D_0^3 \pi^{-2} r_1^3(\mu_k) - D_2(3\mu_k^3)^{-1} r_2(\mu_k) \right) + \right. \right. \\
 &+ 2D_0 D_2 (3\pi\mu_k^3 h^4)^{-1} r_1(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 2r_2(\mu_k)) + (3h^5 \mu_k^3)^{-1} \left( D_4 \mu_k^{-2} r_3(\mu_k) + 2D_2 D_0^2 \pi^{-1} r_1^2(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - r_2(\mu_k)) \right) + \\
 &+ 2D_0 D_2 (3\pi\mu_k^3 h^4)^{-1} r_1(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 2r_2(\mu_k)) + (3h^5 \mu_k^3)^{-1} \left( D_4 \mu_k^{-2} r_3(\mu_k) + 2D_2 D_0^2 \pi^{-1} r_1^2(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - r_2(\mu_k)) \right) + \\
 &\left. + 2(3\pi\mu_k^5 h^6)^{-1} \left( D_0 D_4 / 8 r_1(\mu_k)(16r_3(\mu_k) + 3r_6(\mu_k)) - D_2^2 \mu_k^{-1} r_2(\mu_k) r_5(\mu_k) \right) + (3\mu_k^5 h^7)^{-1} \times \right. \\
 &\left. \times \left( D_0 \pi^{-2} r_1(\mu_k) \left( 4D_0 D_4 / 3 r_1(\mu_k)(3r_3(\mu_k) + r_6(\mu_k)) + D_2^2 \mu_k^{-1} r_5(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 4r_2(\mu_k)) \right) - D_6(5\mu_k^2)^{-1} r_4(\mu_k) + \dots \right) \right] \\
 \mathfrak{G}_{kn} &= 2\pi^{-1} \left[ -\theta_4 \psi_0(\mu_n, \mu_k) - 2\theta_3 s_0 v_1 R \pi(\kappa l)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \tau_{mn} \iota_{km} + \right. \\
 &+ 2\pi^{-1} \left\{ D_0 h^{-1} r_1(\mu_k) r_1(\mu_n) + 4D_0^2 (\pi h^2)^{-1} r_1(\mu_n) r_1^2(\mu_k) + h^{-3} \left( 4D_0^3 \pi^{-2} r_1^3(\mu_n) r_1^2(\mu_k) + 0, 5D_2 r_8^{(1)}(\mu_k, \mu_n) \right) + \right. \\
 &\left. + 2D_0 D_2 (\pi h^4)^{-1} r_1(\mu_k) r_8^{(2)}(\mu_k, \mu_n) + h^{-5} \left( D_4 / 24 r_9^{(1)}(\mu_k, \mu_n) + 2D_2 D_0^2 \pi^{-2} r_1^2(\mu_k) r_8^{(3)}(\mu_k, \mu_n) \right) + \right. \\
 &\left. + (6\pi h^6)^{-1} \left( D_0 D_4 r_1(\mu_k) r_9^{(2)}(\mu_k, \mu_n) + 6D_2^2 \mu_k^{-3} r_5(\mu_k) r_8^{(1)}(\mu_k, \mu_n) \right) + \right. \\
 &\left. + h^{-7} \left( 2D_2^2 D_0 (\pi^2 \mu_k^3)^{-1} r_1(\mu_k) r_5(\mu_k) r_8^{(1,5)}(\mu_k, \mu_n) + D_0^2 D_4 (6\pi^2 \mu_k^5)^{-1} r_9^{(3)}(\mu_k, \mu_n) r_1^2(\mu_k) - D_6 / 720 r_{10}(\mu_k, \mu_n) + \dots \right) \right].
 \end{aligned}$$

Де  $r_1(\mu_k) = \mu_k^{-1} \sin \mu_k$ ;  $r_2(\mu_k) = 3\mu_k \cos \mu_k + (2\mu_k^2 - 3) \sin \mu_k$ ;  $r_3(\mu_k) = 0, 4\mu_k^4 \sin \mu_k + \mu_k^3 \cos \mu_k - r_2(\mu_k)$ ;

$$r_4(\mu_k) = 2/3 \mu_k^5 (0, 4\mu_k \sin \mu_k + \cos \mu_k) - 5\mu_k (\mu_k^2 - 3) \cos \mu_k - (2\mu_k^4 - 10\mu_k^2 + 15) \sin \mu_k;$$

$$\theta_4 = (v_1(m_2 - 1) - m_1 s_0) n_1^{-1},$$

$$r_5(\mu_k) = (2 - \mu_k^2) \sin \mu_k - 2\mu_k \cos \mu_k; \quad r_6(\mu_k) = (\mu_k^4 - 12\mu_k^2 + 1) \sin \mu_k + (4\mu_k^2 - 1) \mu_k \cos \mu_k;$$

$$r_7(\mu_k) = (\mu_k^6 - 30\mu_k^4 + 360\mu_k^2 - 720) \sin \mu_k + 6\mu_k (\mu_k^4 - 20\mu_k^2 + 120) \cos \mu_k.$$

$$\tau_{mn} = \frac{J_0(\mu_n) \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{\mu_n^2 + (\gamma_m v_1 R)^2} - \frac{v_2}{v_1 s_0} \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{\mu_n^2 + (\gamma_m v_2 R)^2} \right]}{\gamma_m^3 I_1(\gamma_k v_2 R) [v_2 W_m(2) - v_1 s_0 W_m(1)]}, \quad \iota_{kn} = I_1(\gamma_k v_2 R) \gamma_k^4 J_0(\mu_n) \left[ \frac{l_2 v_2}{l_1 (\mu_n^2 + \gamma_k^2 v_2^2 R^2)} - \frac{v_1}{\mu_n^2 + \gamma_k^2 v_1^2 R^2} \right],$$

$$r_8^{(m)}(\mu_k, \mu_n) = \frac{m r_5(\mu_k) r_1(\mu_n)}{\mu_k^3} + \frac{r_5(\mu_n) r_1(\mu_k)}{\mu_n^3}; \quad r_9^{(m)}(\mu_k, \mu_n) = \frac{r_1(\mu_k) r_6(\mu_n)}{\mu_k^5} + \frac{6r_5(\mu_n) r_5(\mu_k)}{\mu_n^3 \mu_k^3} + \frac{m r_6(\mu_k) r_1(\mu_n)}{\mu_n^5};$$

$$r_{10}(\mu_k, \mu_n) = r_1(\mu_k) r_7(\mu_n) \mu_n^{-7} - 15r_6(\mu_n) r_5(\mu_k) \mu_n^{-5} \mu_k^{-3} - 15r_5(\mu_n) r_6(\mu_k) \mu_n^{-3} \mu_k^{-5} + r_7(\mu_k) r_1(\mu_n) \mu_k^{-7}.$$

Після визначення невідомих сталих  $\chi_i$  ( $i=0,1,2,\dots$ ) із системи (16), можна обчислити напружено-деформований стан як у пружному штампі, так в шарі та основі за формулами (12) – (14).

**Результати.** Чисельний аналіз проведеного дослідження представлений для потенціалу Трелоара (тіла неогуківського типу) у випадку хімічно активної гуми СКУ-6 при наступних параметрах:  $R=1\cdot 10^{-2}$  м,  $H=1\cdot 10^{-1}$  м,  $h=1.6\cdot 10^{-2}$  м,  $\varepsilon=10^{-4}$ ,  $E=8\cdot 10^{-5}$  МПа,  $\lambda_1=0.7; 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2$ . Алгоритм чисельного розв’язку базується на методі редукції та реалізований у вигляді програми в пакеті Maple. Також зазначимо, що чисельне дослідження системи типу (16) на квазірегулярність представлено в [1].

Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик для задачі про попередньо напружений циліндричний штамп та попередньо напружений шар, що лежить без тертя на основі без початкових напружень у

випадку потенціалу Трелоара, представлено на рис. 1–5.

Із графіків (рис. 1–5) видно, що суттєвий вплив для потенціалів найпростішої структури відмічається лише при перетинах  $\xi < 1$  пружного циліндричного штамп площинами паралельними основі. Причому цей вплив менший при стиску ( $\lambda_1 < 1$ ) та більший у випадку розтягування ( $\lambda_1 > 1$ ).

Також наявність початкових напружень у шарі призводить до збільшення переміщень  $U_3$  у ділянці контакту у пружному циліндричному штампі при стиску, а у випадку розтягнення – до їх зменшення. Аналогічна ситуація і для радіальних переміщень  $U_r$  у пружному циліндрі та шарі з початковими напруженнями.

Із просторового графіка тангенціальних напружень (рис. 5) можна помітити, що безпосередньо в зоні контакту пружних циліндра і шару та на боковій поверхні пружного штамп  $\rho = 1$ , вони дорівнюють нулю (це вимагають граничні умови (6) – (10)) і найбільш зосереджені поблизу зони контакту.

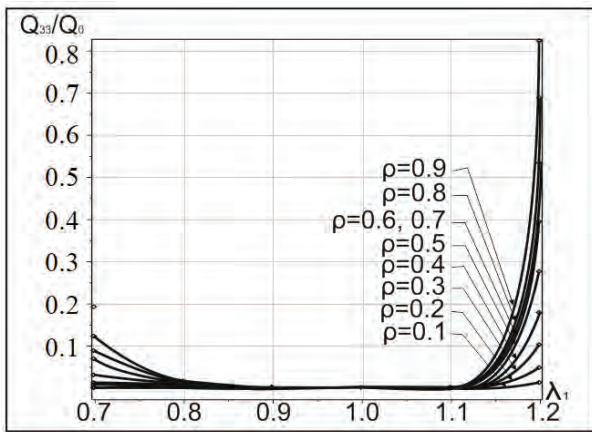


Рис. 1. Вплив початкових напружень на нормальний закон розподілу

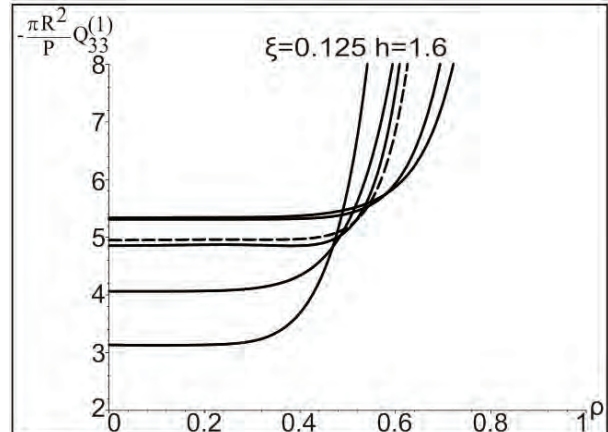


Рис. 2. Нормальні напруження у циліндрі в перерізі  $\xi=0,125$

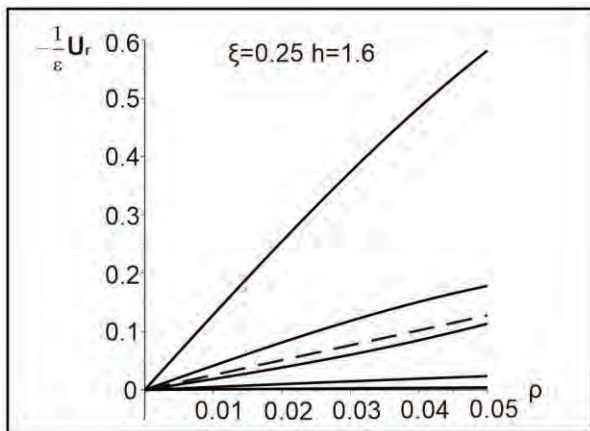


Рис. 3. Переміщення  $U_r$  у пружному циліндрі з початковими напруженнями для перерізу  $\xi=0,25$

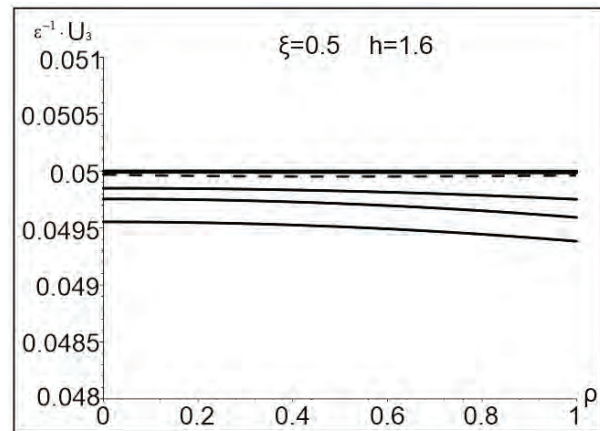


Рис. 4. Переміщення  $U_3$  у пружному циліндрі з початковими напруженнями для перерізу  $\xi=0,5$



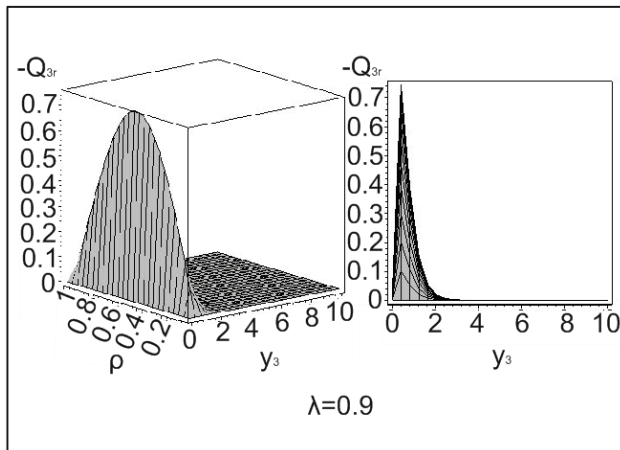


Рис. 5. Напруження  $Q_{zr}$  при  $\lambda_1=0,9$

**Дискусія.** У результаті проведених досліджень розв'язок задачі представлений у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної квазірегулярної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (16). Ці коефіцієнти залежать від структури пружного потенціалу, висоти пружного штампa  $H$ , і товщини попередньо напруженого шару, а вільні члени – від коренів  $n_1, n_2$ .

Ураховуючи проведене дослідження, для потенціалу Трелоара, що відповідає нерівним кореням рівняння (4), вплив початкових напружень на напружено-деформований стан циліндричного штампa та шару, що лежить без тертя на основі без початкових напружень, виражається таким чином:

1. Початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень у циліндричному штампі та шарі, а при розтягненні – до їх збільшення, у випадку переміщень все відбувається навпаки. Тобто наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних тіл дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення.

2. Найбільший вплив початкових напружень відзначений на бічній поверхні штампa.

3. Більш суттєво, у кількісному плані, початкові напруження діють у високоеластичних мате-

ріалах у порівнянні з більш жорсткими, але якісно їхній вплив зберігається.

4. Небезпечним є випадок, коли початкові напруження наближаються до значень поверхневої нестійкості матеріалу [2], оскільки контактні напруження і переміщення різко змінюють свої значення.

Із отриманих розв'язків за допомогою граничного переходу можна отримати декілька окремих випадків: при  $\lambda_1=1$  – розв'язок задачі про тиск пружного циліндричного штампa на шар без початкових напружень [1]; при  $h \rightarrow \infty$  – розв'язок задачі про тиск пружного циліндричного штампa на півпростір з початковими напруженнями [2; 9; 10].

Наукова новизна результатів проведеного дослідження:

1. Отримано розв'язок вісесиметричної статичної задачі лінеаризованої теорії пружності для тіл із початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих і нестисливих тіл.

2. Встановлено аналітичні залежності, які дозволяють досліджувати поведінку напружень та переміщень у зоні контакту для пружного циліндричного штампa та пружного шару з початковими напруженнями без врахування сил тертя у випадку, коли попередньо напружений шар лежить без тертя на основі без початкових напружень;

3. За допомогою числової реалізації методу дослідження встановлено особливості впливу початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень пружних циліндра й шару порівняно з випадком відсутності початкових напружень.

**Висновки.** Отже, можна зробити висновок про те, що вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружних тіл достатньо сильний і суттєво впливає на закон розподілу контактних характеристик. Тому його врахування дозволить значно покращити точність інженерних обчислень у розрахунках на міцність конструкцій та деталей машин.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Ярецька Н.О. Математична модель передачі навантаження від попередньо напруженого циліндричного штампa до пружного шару з початковими напруженнями. *Physical and mathematical justification of scientific achievements: collective monograph*. Boston : Primedia eLaunch, 2020. P. 60–80. URL : <https://doi.org/10.46299/ISG.2020.MONO.PHYSICAL.III>.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
3. Guz A. N. Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, No 4. P. 343–415.
4. Guz A. N., Bagno A. M. Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, No 6. P. 585–595.

5. Semenyuk, N.P., Zhukova, N.B. Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, No 1. P. 40–53.
6. Vasu T.S., Bhandakkar T.K. A Study of the Contact of an Elastic Layer–Substrate System Indented by a Long Rigid Cylinder Incorporating Surface Effects. *J. of Applied Mechanics*. 2016. Vol. 83, No 6. P. 061009.
7. Petinrin M.O., Oyedele A.A., Ajide O.O. Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. *World Journal of Engineering and Technology*. 2016. Vol. 4, No 1. P. 51–58.
8. Босаков С. В. Две контактные задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство. *Наука и техника*. 2018. № 6(17). С. 458–464. URL : <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-6-458-464>.
9. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew.* 2018. Vol. 54, No 5. P. 539–543. URL : <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>.
10. Бабич С.Ю., Ярецька Н.О. Контактна взаємодія попередньо напружених кільцевого штампу і півпростору. *Доповіді НАН України*. 2020. № 11. С. 24–30. URL : <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.11.024>.
11. Рудницький В.Б., Ярецька Н.О., Венгер В.О. Застосування ІТ технологій в механіці деформованого твердого тіла. *Проблеми трибології (Problems of Tribology)*. 2017, № 2(84). С. 32–40.
12. Ярецька Н.О. Контактна задача для двох попередньо напружених співвісних циліндрів та шару з початковими напруженнями. *Information, its impact on social and technical processes: Abstracts of VIII International Scientific and Practical Conference*. (Haifa, Israel, 16-17 march 2020). Haifa, Israel, 2020. P. 106–111.
13. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N. Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, No 6. P. 346–356.
14. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N., Degtyar S. V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, No 6. P. 629–635.

#### REFERENCES

1. Yaretska N.O. (2020). Matematychna model peredachi navantazhennia vid poperedno napruzhenoho tsylindrychnoho shtampa do pruzhnoho sharu z pochatkovymy napruzheniamy. *Physical and mathematical justification of scientific achievements* [Collective monograph]. International Science Group, 60–80. (in Ukrainian)
2. Guz A. N., Babich S. Yu. & Glukhov Yu. P. (2015). Smeshannyye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachalnymi napryazheniyami [Mixed Problems for Prestressed Elastic Foundation]. Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. (in Russian)
3. Guz A. N. (2019). Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III. *International Applied Mechanics*, 55(4), 343–415.
4. Guz A. N., Bagno A. M. (2019). Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *International Applied Mechanics*, 55(6), 585–595.
5. Semenyuk, N.P., Zhukova, N.B. (2020) Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics*, 56(1), 40–53.
6. Vasu T.S., Bhandakkar T.K. (2016). A Study of the Contact of an Elastic Layer–Substrate System Indented by a Long Rigid Cylinder Incorporating Surface Effects. *J. of Applied Mechanics*, 83(6), 061009.
7. Petinrin M.O., Oyedele A.A., Ajide O.O. (2016). Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. *World Journal of Engineering and Technology*, 4(1), 51–58.
8. Bosakov S. V. (2018). Dve kontaktnyye zadachi o vдавливании koltseвого shtampa v uprugoe poluprostranstvo [Two contact problems on the indentation of an annular stamp into an elastic half-space]. *Nauka i tehnika*, 6(17), 458–464. (in Russian)
9. Yaretskaya N. F. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew.* 54(5), 539–543.

10. Babych S. Yu., Yaretska N. O. (2020). Kontaktna vzaiemodiia poperedno napruzhenykh kiltsevoho shtampu i pivprostoru [Contact interaction of prestressed annular punch and semispace]. *Dopovidi NAN Ukrainy*, 11, 24–30. (in Ukrainian)
11. Rudnytskyi V. B., Yaretska N. O., Venher V. O. (2017). Zastosuvannia IT tekhnolohii v mekhanitsi deformovanoho tverdoho tila [The use of IT technologies in the mechanics of deformable bodies]. *Problems of Tribology*, 2(84), 32–40. (in Ukrainian)
12. Yaretska N. O. (2020). Kontaktna zadacha dlia dvokh poperedno napruzhenykh spivvisnykh tsylindriv ta sharu z pochatkovymy napruzhenniamy [Contact problem for two prestressed coaxial cylinders and a layer with initial stresses]. *Information, its impact on social and technical processes: Abstracts of VIII International Scientific and Practical Conference*. Haifa, Israel, 106–111. (in Ukrainian)
13. Babich S. Yu., Dikhtyaruk N. N. (2020). Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*, 56(6), 346–356.
14. Babich S. Yu., Dikhtyaruk N. N., Degtyar S. V. (2019). Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 55(6), 629–635.

## РОЗДІЛ II. КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

UDC 004.9.629.7.05

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-12>

### FUNCTIONAL METHODS OF DEVELOPING INTEGRATED MODULAR AVIONICS SYSTEMS

**Kovalenko Yu. B.**

*Ph.D. in Pedagogy,*

*Associate Professor at the Department of Information Technology Security,  
Doctoral Student in the study program "Computer Science and Information Technology"*

*National Aviation University*

*Liubomyra Huzara avenue, 1, Kyiv, Ukraine, 03058*

*orcid.org/0000-0002-6714-4258*

*yleejulee22@gmail.com*

**Kozlyuk I. O.**

*Doctor of Technical Sciences,*

*Professor at the Department of Telecommunication Systems*

*National Aviation University*

*Liubomyra Huzara avenue, 1, Kyiv, Ukraine, 03058*

*orcid.org/0000-0001-8239-8937*

*avia\_ira@ukr.net*

**Key words:** *information systems, decision-making support, project in the aviation industry, automated design system, technological process, integrated modular avionics.*

Development of modern avionics systems To rob the design of such systems is unfeasible without victorious automation. Today, the area of such instruments is represented by patented instruments, which are broken by such great authors of lithuanians, such as Boeing and Airbus, as well as by low criticality, but sometimes they are often seen in All the tools are based on the architectural models of the broken system. Avionics systems today are a complex interaction of software and hardware, so the methods and approaches developed in the field of design and analysis of avionics and software systems should enrich each other. At the top of the statistics, the movable materials available for describing the architectures of the avionics systems are displayed, which is shown as the program for the best passing through the texts of the meaning and prompted the concepts, as it is good to go for the presentation. Then the statty presents a set of tools for designing custom avionics systems. A set of tools will provide you with a platform for designing and analyzing architectural models, as well as special solutions for singing avionics systems. Winning the structure, editing and manipulating models in both text and graphical formats. It is important that the architectural models themselves, how to describe the components of the system and interconnection between them, form the basis for the formation of new technologies and tools for automating the design. Smell allow you to describe the specific aspects of architecture in a single form-small-scale model, as you can use different tools for revising the internal narrow-mindedness of the architecture, and the configuration of the automation of the system. The foldability of modern emergency systems and a lot of them to the extent necessary to produce up to the need for local resources. When IMA-systems are opened, the retailers are stuck with low

levels of problems, and the stinks have not been stuck in the past. For the resolution of these problems, additional help comes in the form of automation and the computer-turn to adjust the box. The development of a straight line in the first place is linked to the vicarious models of the new models, including the architectural models of the software and hardware complexes.

## ФУНКЦІОНАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗРОБКИ ІНТЕГРОВАНИХ МОДУЛЬНИХ СИСТЕМ АВІОНІКИ

**Коваленко Ю. Б.**

*кандидат педагогічних наук,  
доцент кафедри безпеки інформаційних технологій,  
докторант напрямку 'Комп'ютерні науки та інформаційні технології'  
Національний авіаційний університет  
пр. Любомира Гузара, 1, Київ, Україна  
orcid.org/0000-0002-6714-4258  
yleejulee22@gmail.com*

**Козлюк І. О.**

*доктор технічних наук,  
професор кафедри телекомунікаційних систем  
Національний авіаційний університет  
пр. Любомира Гузара, 1, Київ, Україна  
orcid.org/0000-0001-8239-8937  
avia\_ira@ukr.net*

**Ключові слова:** *інформаційні системи, підтримка прийняття рішень, проекти в авіаційній галузі, автоматизована система проектування, технологічний процес, інтегрована модульна авіоніка*

Розвиток сучасних систем авіоніки робить проектування таких систем неможливим без використання засобів автоматизації. У даний час область таких інструментів представлена запатентованими інструментами, розробленими такими великими виробниками літаків, як Boeing та Airbus, а також низкою відкритих або частково відкритих міжнародних проектів, що відрізняються за термінами дії, наявністю вихідного коду та документації. Есі інструменти базуються на архітектурних моделях розробленої системи. У цій статті розглядаються мови, доступні для опису архітектурних моделей систем авіоніки, та показано, яка мова програмування є найбільш підходящою через її текстові позначення та вбудовані концепції, які добре підходять для представлення більшості елементів вбудованих систем. Потім у статті представлено набір інструментів для проектування сучасних систем авіоніки. Набір інструментів забезпечує як загальну платформу для проектування та аналізу архітектурних моделей, так і спеціалізоване рішення для певної галузі систем авіоніки. Він підтримує створення, редагування та маніпулювання моделями як у текстовому, так і в графічному форматах. Зауважимо, що саме архітектурні моделі, що описують компоненти системи і взаємозв'язок між ними, стають основою для формування нових технологій і інструментів для автоматизації проектування. Вони дозволяють описувати різні аспекти архітектури в єдиній формалізованій моделі, яку можна обробляти різними інструментами для перевірки внутрішньої узгодженості архітектури, відповідності різним вимогам системи, автоматизації проектних рішень, генерації даних і файлів конфігурації, вихідний код і т.д. Складність сучасних авіаційних систем і високі вимоги до їх надійності призводять до необхідності використання загальних ресурсів. Під час створення ІМА-систем розробники



стикаються з низкою завдань і проблем, з якими вони раніше не стикалися. Для вирішення цих проблем на допомогу приходять різні засоби автоматизації і комп'ютерна підтримка розробки. Розвиток цього напрямку в першу чергу пов'язано з використанням різних моделей, в тому числі архітектурних моделей програмно-апаратних комплексів.

**Introduction.** The development of modern avionics systems and other safety-critical control systems requires advanced methodological and instrumental support. There are appropriate tools available, but the development of such high-tech domestic industries as aircraft construction cannot rely on them alone for at least two reasons. First, such tools are quite expensive; secondly, and probably more importantly, they are 'closed' for development and adaptation by domestic researchers and engineers, which leads to an even greater backlog of available technologies in this area.

Tools for the design, development, verification and validation of avionics-type systems traditionally support the model-based approach to model development (Model Driven Engineering – MDE, and Model Driven System Engineering – MDSE), as modeling methods in their various forms: full-scale, semi-natural, mathematical – are always utilized in aircraft construction and related industries [1]. In the last 20 to 30 years, a new type of modeling has appeared in the field of software development, related to research on formal program specifications and the use of so-called formal methods for analysis – in particular, for verification of software systems. Avionics systems today are a complex interaction of software and hardware, so the methods and approaches developed in the field of design and analysis of avionics and software systems should enrich each other. For this reason, the use of formal methods of verification of complex software and hardware systems, such as operating systems and microprocessors, allowed us to quickly master the development of design and integration of avionics systems, as many problems in this new area can be solved based on modeling technologies and verification [2].

This article focuses on the development of methods for modeling, synthesis and verification of complex aircraft systems, but the scope of potential application of these technologies is much wider.

**Integrated modular avionics.** Currently, the main approach to the design and development of on-board systems of civil aircraft is the approach of integrated modular avionics. According to this approach, specialized controllers are replaced by general-purpose processor modules, which provide independent operation of different aviation systems. The wires of each aviation subsystem are replaced with virtual connections within a switched network infrastructure based on technologies such as AFDX (Avionics Full Duplex Switched Ethernet) [3; 4; 5] and CAN (Controller Area Network) [6; 7]. This reduces

unreasonable duplication of hardware, which leads to unacceptable levels of power consumption and complexity of the on-board equipment system. But, on the other hand, this approach greatly complicates the process of software and hardware development, posing new challenges in the design and integration of software and hardware.

With the introduction of the IMA approach in the complex of on-board equipment of the aircraft, there is a new subsystem that provides a hardware platform for the software of other on-board systems. This subsystem is called the IMA platform and code-named ATA-42. The team responsible for designing, configuring and verifying the IMA platform is usually called the System Integration Group, as its task is not only to develop a stand-alone subsystem, but also to coordinate the needs of all platform users and ultimately integrate the entire software and hardware components using the IMA platform.

The tasks of the System Integration Group also include:

- clarification/coordination of discrepancies between requirements and needs with software and hardware developers;

- projecting the IMA platform based on the needs of functional applications in hardware resources, including:

- 1) distribution of functional applications from computing modules (Core Processing Module – CPM) taking into account the needs of applications (amount of CPU time, distribution of CPU time between strictly periodic applications, RAM/ROM memory, network interface bandwidth, etc.);

- 2) determining the composition of network components (network topology), taking into account the requirements of reliability, delivery time of messages from sender to recipient, etc.

- verification of the developed on-board equipment complex (OEC) for compliance with the requirements set forth in the design documentation for the aircraft, OEC and its individual components;

- preparation of configuration tables for IMA platform components.

To solve these problems requires an accurate understanding of all the details of the developed complex at both high and low levels of detail, as well as the greatest care in the analysis of the consequences in case of changes. Due to the size of the OEC and the number of essential parts of modern aircraft, it is impossible for one person to have complete knowledge of the full systems. In such conditions, the use of traditional development methods by specialists, based

on a careful description of all requirements, architectural solutions, etc. in text documents, becomes excessively time-consuming and error-prone. The ability to utilize software automation to solve these problems encounters problems of heterogeneity and unstructured information. A natural step to overcome this problem is the formalization of information, translating it into a unified machine-readable form, which allows automation of its processing.

In the context of designing complex software and hardware systems such as the IMA platform, the main core is the architecture of the complex, around which the requirements for the system as a whole are designed, including its individual components, design trade-offs, analysis and verification, etc. Therefore, it is not surprising that it is the architectural models that describe the components of the system and the relationship between them become the basis for the formation of new technologies and tools for design automation. They allow different aspects of the architecture to be described in a single formalized model, which can be processed by different tools to check the internal consistency of the architecture, meet the system's various requirements, automate design decisions, generate configuration data and files, source code, etc. Model analysis tools can be applied at different levels of abstraction, including at the earliest stages of the project in the presence of only partial and evaluative information. Among experts, this practice is called 'Early Validation', and associated sets of relevant tools (Early Validation Tools) [8].

The places for application of such tools in the process of designing and developing the IMA platform are shown in Fig. 1.

The use of architectural models in this area allows resolution of the following problems:

1. Checking restrictions/requirements for the components of the developed complex:

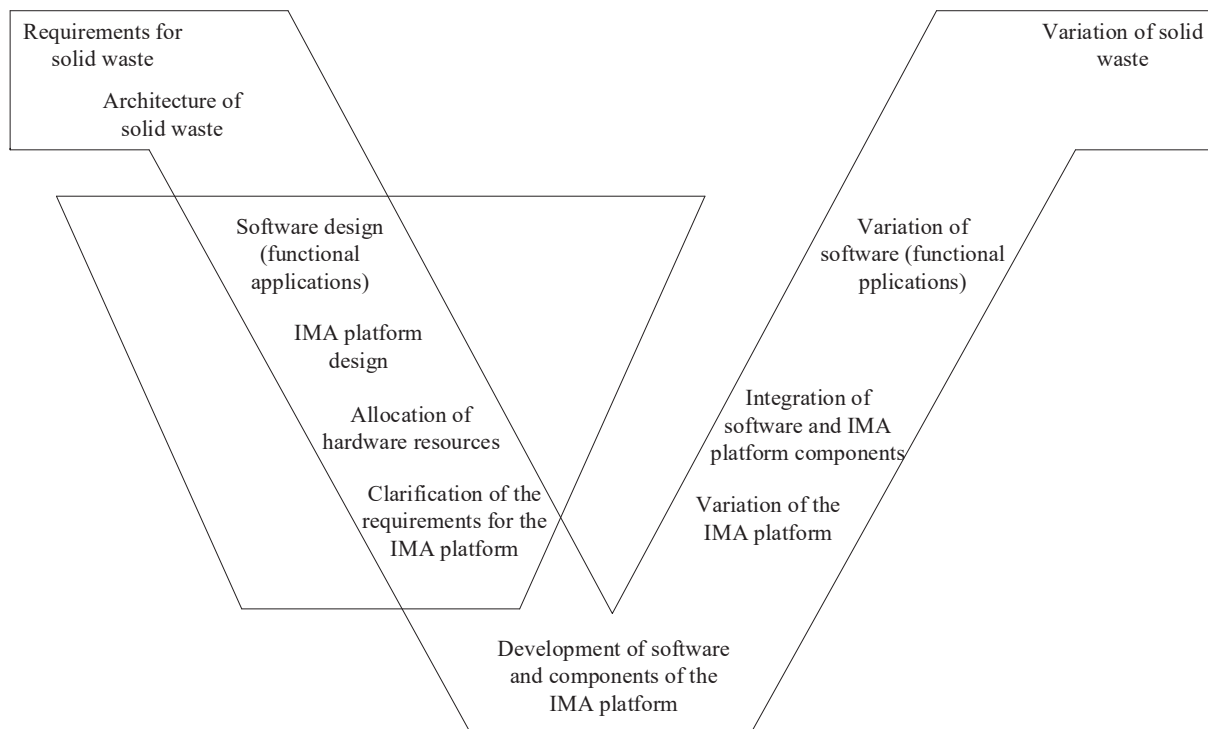
- Checking the adequacy of hardware resources; for example, that the needs of all functional applications in CPU time and memory meet the hardware characteristics of the computing module on which these applications will run.

- Checking the temporal characteristics of the interaction of functional applications or computing modules; for example, that the delivery time of a message from one functional application to another does not exceed the specified requirements.

- Checking the possibility of allocating hardware resources in accordance with certain restrictions; for example, the ability to allocate CPU time for a set of strictly periodic tasks, taking into account that each task must be run at certain times according to a given period.

- Safety and failure analysis of individual components of the OEC (safety analysis).

2. Automation of distribution of hardware resources between functional applications, taking into account defined restrictions; for example, distribution of functional applications on computer modules taking into account sufficiency of bandwidth of network interfaces and possibility of scheduled periodic tasks.



**Fig. 1. Validation during design and development IMA platforms**

3. Generation of elements of the BWC platform: configuration data / files, source codes of individual components of the platform, etc.

#### Description languages of architectural models.

During the research in the field of design of software and hardware systems on the basis of models, several approaches to the description of architectural models were formed (table 1) The most widespread approaches are based on AADL [9], EAST-ADL [10] and UML [11]. The EAST-ADL language is not considered in this paper because its scope is limited to automotive systems based on AUTOSAR architectural solutions. AADL inherited the main features from the Meta-H language, developed to describe on-board avionics systems in the late 1990s, and is now the most common language for describing architectural models of software and hardware systems in various application areas. UML is most often used to describe software and hardware systems in the form

of one of its profiles, the most popular of which are SysML [12] and MARTE [13]. Below are the main features of these languages [14].

Based on the above, it can be concluded that both UML (in the form of SysML and MARTE profiles) and AADL provide approximately the same capabilities to describe the software and hardware model of the OEC. At the same time, AADL has a number of advantages:

- In addition to graphical notation, AADL has a text representation that will allow a specialist to create and edit models, as well as analyze the semantics of existing models without specialized editors, while ‘reading’ UML-based models without special chart editors can be an intractable task;

- AADL limits the developer to a specific set of declaration types (model element types) that have specific semantics that the developer can use to describe the firmware model, allowing you to reuse

Table 1

#### Languages for describing architectural models

UML	AADL
<b>Notations</b>	
Provides a set of charts to represent the structure of the software; in this case, individual diagrams that describe certain components of the software and hardware complex that cannot be fully related to each other, i.e. combining models developed by different groups of developers is extremely difficult. Developed more in the tradition of programming languages than descriptions of diagrams; it operates with declarations of types and implementations of model components that can be reused in declarations of other components.	developed more in the tradition of programming languages than descriptions of diagrams; it operates with declarations of types and implementations of model components that can be reused in declarations of other components.
<b>Extending</b>	
Can be extended by using the following mechanisms: stereotypes, which allow to expand the UML dictionary to create new modeling elements; tags of identifiers and values (tagged values); redefinition of model elements with additional constraints. These mechanisms are usually used by one or another profile, which is a dialect of model description (for example, SysML and MARTE).	Can be extended by defining: user-defined property sets that can add new property types and definitions or extend existing types and properties; annex-specifications, which allow to describe additional characteristics of model elements in arbitrary syntax and with arbitrary semantics, which are processed by specialized tools.
<b>Aspects of modeling</b>	
used mainly to describe the structure of the software; it is based on three aspects: data, interaction and state; data is described by class diagrams, interaction is described by connection diagrams or sequence diagrams, states are described by state diagrams. The most used SysML and MARTE profiles extend UML as follows: SysML adds two types of charts – the requirements chart and the parametric chart; the requirements diagram is used to describe the requirements and link the requirements to the elements of the model; parametric diagram is used to describe the relationships of software model components with hardware model components. MARTE expands UML by introducing the following stereotypes: software model, hardware model, the relation between software and hardware models.	used to describe the ‘execution architecture’. ‘Execution architecture’ is implicitly divided into two parts: a set of software components and interaction between them, a set of hardware components and interaction between them; also describes the relationship between software components and hardware components.

existing models developed by independent teams at no additional cost. At the same time, UML, due to its versatility, does not impose strict restrictions on the types and semantics of the elements used, which complicates the understanding of models developed by third-party experts.

**MASIW – a system integrator workstation.**

Given the above features, the AADL language was chosen as a formalism to describe architectural models in research in the field of automation of software and hardware systems.

The research pursues a dual goal, consisting of a research component – the development of methods for modeling and verification of complex software and hardware systems, and an engineering component – the development of working tools for designers and integrators of avionics systems.

The basic principles on which research and tools are built are as follows:

- openness – as a necessary condition for cooperation with the international research community;
- reliance on international standards;
- a combination of mathematical rigor in the choice of proposed solutions and ensuring the availability of these solutions for engineers;
- focus on support and integration of various processes of the life cycle of systems: definition and analysis of requirements, design, integration and verification of software and software and hardware systems.

Currently developed MASIW tools allow to solve such tasks.

1. Creating, editing and managing models in AADL:

- 1) creating / editing models using a text or graphic editor;
- 2) support for team development with the ability to track and make changes to individual elements of the model;
- 3) support for the re-use of third-party AADL models.

2. Analysis of models:

- 1) analysis of the structure of the software and hardware complex – the sufficiency of hardware resources, consistency of interfaces, etc.;
- 2) analysis of data transmission characteristics in the AFDX network – time of delivery of messages from sender to recipient, depth of queues of transmitting ports, etc.;
- 3) simulation of a model of software and hardware with the generation of user-defined reports on the results of the simulator.

3. Synthesis of models:

- 1) the distribution of functional applications from computing modules, taking into account the resource constraints of the hardware platform and taking into account additional constraints on the reliability and security of software and hardware;

- 2) generation of CPU computing time allocation between functional applications (application launch schedule cyclogram for ARINC-653 compatible real-time operating systems).

4. Generation of source code / configuration data:

- 1) development of specialized code / configuration data generation tools, based on the provided software interface (API);
- 2) generation of configuration files for VxWorks653 RV and AFDX network end devices.

Model creation, editing and management, as well as code and configuration data generation are implemented using common Eclipse environment extensions, such as Eclipse Modeling Framework, Graphical Editing Framework, Eclipse Team Providing, SVN Team Provider, GIT Team Provider. When implementing these capabilities, we mainly had to solve engineering problems, so in the following sections we will focus in more detail on the implementation of support for analysis and synthesis of models, where the main research tasks were concentrated.

**Analysis of models.** When it comes to the analysis of models, it means the derivation of new properties of the model as a result of considerations about its already known properties. For example, the result of the analysis may be an estimate of the maximum time between sending a message and its delivery based on an analysis of the path of the message and the characteristics of the components encountered in this path. The most important type of model analysis is its verification, ie verification of the model's compliance with the requirements for it. Other types of analysis are usually used as an intermediate step in the verification process.

Requirements for OEC architecture arise from a variety of sources.

- These may be design requirements for the aircraft and the OEC architecture – these requirements in the process of analysis are clarified and decomposed into requirements for individual components of the system.
- Project often regulates the requirements for the design and organization of architectural models, which are described in the so-called model design standard.
- Another source of requirements is the restriction on the area of permissible use or on the permissible configurations of the simulated components (usage domain rules).
- The author of a library model component may impose requirements on the consistent use of this component.
- There are also requirements imposed by model analysis tools or tools that are necessary to be able to perform the relevant analysis.

Since when modeling the system there is a need to detect errors as early as possible, the task is to ana-



lyze the model, which has unspecified components or components with a still unknown structure. Sometimes in such cases for some kind of analysis enough assumptions about the raw components. For example, the system has a process A with an unknown implementation. However, it is assumed or known that on average every 100 ms it generates a data packet with an average size of 100 bytes, intended for process B. In this case, the components that provide network interaction are described in detail in the model. Then such an incomplete model can be analyzed in terms of network interaction, process delays, buffer occupancy of network components, and so on.

**Types of model analysis.** Types of analysis differ in the method of its implementation (static or dynamic) and aspects of the object under study (the rough division is aspects of the structure or architecture of the system and aspects of behavior, functioning of the system).

The dynamic analysis implies that some patterns are clearly set, according to which there is a change in the model (the internal state of the components, the relationships between them) and interaction with the environment. During such analysis, actions are performed according to the given regularities, obtaining new states of components, new connections, ensuring interaction with the environment. Further (depending on the checked requirements) there is an analysis of the received condition or sequence of states and, for example, an estimation of their correctness.

The static analysis uses a mathematical description of the components of the model, which is compared with the description of the requirements for them. In the course of the analysis the comparison of requirements, calculation of characteristics of components on which further conclusions about correctness or incorrectness of the analyzed model are made is carried out.

The analysis of model behavior considers the characteristics that arise only when considering how components behave over time, how they interact with the world around them, what events and how they react, what events and data they generate, how they change their internal state. The structure analysis considers the characteristics of how the components are connected, what properties these connections have, what are the capabilities and directions of data transmission and events, which components have access to certain resources and so on.

Methods and aspects of modeling can be combined in any way, then, in sections 5.3-5.6, all four possible combinations are considered.

**Input data for analysis.** The input data for the analysis is a model of software and hardware complex, which describes the structure and characteristics / properties of the elements of the complex. The previously considered model description lan-

guages (UML and AADL) allow to describe in detail the structure of the developed complex, up to the description of each sensor, button, etc. As practice has shown, such a model is redundant for most types of analysis. Much of the model is ignored by specialized analysis tools, and as a result the tool has to do extra work to sample essential data from the model of the complex. In addition, model description languages give the model developer some freedom in choosing which entities will describe certain components of the developed complex (UML to a greater extent, AADL – to a lesser extent). At the same time, when developing an analysis tool, it is possible to accurately determine the structure of the input data, which does not depend on what specific entities describe the model of the software and hardware complex. Therefore, in the development of the MASIW tool, the concept of so-called representations was proposed. View is a specialized model of the entire software and hardware complex or a certain part of it, which represents a set of essential data in a form convenient for processing, as is the case with representations in database management systems. To create a specialized representation, a set of adapters is used – the rules by which the original model is transformed into a specialized and, if necessary, vice versa. This approach allows you to abstract from how the developer will describe the model of the complex or part of it (what entities will be used and even what model description language will be used). Due to this, the developed analysis tools can be reused in other modeling tools.

**Static structural analysis.** The structure of the model can be understood as a graph. the nodes of which are the components of the model, and the arcs are the connections between the components. Types of connections may differ in different modeling languages. For example, the relationship between two components may mean that one component is part of another, or that one component is a hardware resource on which another, software component is running.

The structure of the model may contain information about the composition of the components of the model (of which components-parts it consists), the location of the components, the degree of connectivity of the components, etc. Most often, modeling languages allow you to compare the components of the model attributes, ie some scalar values. In this case, they also become part of the structure of the model and can be used in structural analysis. For example, you can analyze a model to see if the values of an attribute with some specified name in all the components in which it is defined belong to some specified set of valid values.

One of the possible attributes of the components may be the component type. Examples of the use of type in structural analysis can be the following tasks:



to find out whether all components of some type contain an attribute with some given name. Or another example: find out if all components of type A are part of any of the components of type B.

In modeling languages that aim to describe the structure of the model (as opposed to behavioral targets), structural analysis of the model is more convenient than behavioral analysis. The reason for this is that when using such modeling languages, the structure of the model may already be present, while the behavior is not yet fully defined or described. As a result, a number of analyzes can be performed in advance, before a more time-consuming operation to determine the behavioral component of the model.

To organize and automate static structural analysis it is necessary to solve the following tasks:

1) how to specify what needs to be analyzed (in particular, what condition of correctness of structure of model should be checked and what language should be chosen for the description of this condition);

2) how to set the context of the analysis (for which part of the model structure the analysis should be performed) – most often, the analysis should be performed on the whole model, although it is possible, for example, that the analysis should be performed only on components that are part of this model only some specified type;

3) how to perform a given analysis for a given part of the model;

4) in what form to present to the developer the result of the analysis.

All these tasks arose during the development of a tool for static verification of the correct structure of models in the MASIW environment. In this environment, AADL is used as the simulation language. The structure of the model in this language is hierarchical with respect to the inclusion of some components in others. The AADL model also contains a hierarchy of types that describe component classes. The MASIW environment instantiates the model by generating instances of all components and combining these components as required by the semantics of the AADL language, taking into account all inherited and predefined attributes. As a result, the analysis tools work with an already prepared instance of the model and they do not need to know about the difficulties of transforming the declarative AADL model into an instance of the architectural model of the software and hardware complex.

According to the context of the analysis, there are usually global conditions of correctness and component conditions of correctness. Global correctness conditions represent limitations on the model as a whole. Component correctness conditions describe restrictions on certain types of components. Component conditions are sometimes referred to as ‘invariant properties of components’.

To be able to automatically analyze the model to meet the requirements, the requirements must be formalized and described in machine-readable form. To do this, you must have a language for writing formalized requirements. Currently, MASIW supports the description and verification of the correctness of the architectural model in REAL (Requirements Enforcement Analysis Language) [15].

REAL was proposed in 2010 at Telecom ParisTech (France) and has been supported by several research laboratories around the world. This language is based on the apparatus of set theory. The author of the language tried to make the language as convenient as possible for engineers engaged in modeling and with basic skills of imperative programming. However, this language proved to be unsuitable for practical use due to its limited functionality, and high-quality documentation on this language did not appear in the open press [16].

As practice has shown, the REAL language has a number of serious shortcomings. First, it does not support all data types and components of the AADL language (in particular, it does not support values with units of measure). Second, the viona does not support component correctness conditions. Third, the language does not have the means to reuse some of the conditions in others (which is especially true if the verification of several conditions requires the same calculations). In addition, not all conditions of correctness are convenient to represent in the imperative form, and the REAL language does not contain means for the non-imperative description of conditions of correctness.

To partially solve these problems, we have made a number of changes to the REAL language. Moreover, we aimed to make static analysis not so much a means of demonstrating the correctness of the model on AADL, as a means of finding errors in the model. To do this, we, without formally changing the language, proposed a way to annotate the text of the statement in REAL in order to document its semantics. This documentation is used by our tool when constructing a verification report to demonstrate which validity conditions were verified, on which components the validity conditions were verified, what the verification status was on the components (which components were found to be in violation of the validity conditions and which were not), the reason violation (if it was specified in the comments-annotations).

**Static behavioral analysis.** The purpose of static analysis of the behavior of the system model is to obtain mathematical methods for estimating the limit values of various characteristics of the behavior and interaction of system components.

One of the most important behavioral characteristics is the reaction time of the system to external events. The reaction time is affected by both the speed

of event processing and the time of delivery of information between components. At the heart of the IMA architecture is the idea of dividing hardware resources between many aviation functions while ensuring the absence of unintentional influence of one function on another. The first step in this direction was the separation of computing resources. The next step was the virtualization of data buses, which since Airbus-380 is based on AFDX technology [5].

AFDX is built on the basis of ordinary Ethernet, but has been modified to provide the determinacy, stability, security, reliability required to meet the certification requirements. A key element of AFDX in this regard is the concept of a virtual channel (Virtual Link), which is essentially a virtual wire equivalent to a physical wire between the sender and recipient of messages. The virtuality of the wires reduces the weight, power consumption, complexity of the laying and, most importantly, the cost of maintenance and network development, as the laying of the physical cable is replaced by a modification of the configuration tables in the switches.

In fact, the components that generate and receive messages may be outside the AFDX network. These are either specialized control functions contained in sensors and actuators, or programs that run on computing modules. In all cases, these components are connected to the AFDX network through one or more intermediate gateways, which can communicate with several different data protocols.

#### *Analysis of data transmission in the AFDX network*

AFDX technology is based on full-bandwidth switched Ethernet, so conflicts and delays on the lines during data transmission do not occur. The total packet delivery time is equal to the sum of the packet transmission times on the lines plus the delays in the switches [16].

Queues are installed on the output ports of the switches. Thus, the delay in switches can be very variable due to the merger of different virtual channels competing for each output port. Therefore, to determine the upper limit of the total packet transmission time, it is necessary to analyze the delays in each output port of the switch.

Another important behavioral feature of the AFDX network is the guarantee that there is enough space in each queue to store all incoming packets. In practice, for each queue in the network, the upper limit of the amount of data in this queue is estimated.

There are several analytical methods for calculating the estimate of the upper limits of packet delivery time and queue sizes: Model Checking, Trajectory, Network Calculus. Everyone has their advantages and disadvantages. The main disadvantage of most methods is the so-called pessimism – that is, obtaining a deliberately higher estimate due to some

assumptions or rough calculations. In addition, a significant disadvantage of the Model Checking method is that when the size of the network increases, it very quickly leads to a combinatorial explosion. Only Trajectory and Network Calculus methods are suitable for industrial use.

#### *The Trajectory method*

The Trajectory method [17] is based on the analysis of the worst case scenario that can occur with a packet on its trajectory. The occupancy interval for packet  $f$  in the output port  $p$  is the time interval during which  $f$  can be processed in  $p$ . The Trajectory method assumes the longest employment interval in each port. For each competing channel, the maximum number of packets that can delay the sending of packet  $f$  from port  $p$  during the busy interval is estimated.

When calculating the upper limit of packet delivery time for a given virtual channel, it is assumed that the packet  $f$  is on the output port  $p$  in the queue, which is already the maximum number of packets of all other virtual channels that can delay sending packet  $f$ .

Estimation of the upper limits of queue sizes by the Trajectory method is performed as follows. It is necessary for each source port to find the maximum of the queue sizes among the busy intervals of all virtual channels sent through this port. This value will be the upper limit of the queue size of this port.

#### *The Network Calculus method*

In the Network Calculus method, the flow of information through a specific network node is a function of the flow. The function of the flow  $R(t)$  from time  $t$  is a function whose value at time  $t$  is the total number of bits that entered this node from the moment  $t_0 = 0$ .

Since the nature of the flow function in this node, in general, is influenced by many different factors, its exact definition is quite difficult. To analyze information flows, the Network Calculus method uses so-called arrival curves, which majorize the flow function ‘evenly’ from any point in time: the incoming flow curve  $\alpha(t)$   $R(t)$  is such a non-decreasing function that for any  $0 \leq s \leq t$  the inequality  $R(t) - R(s) \leq \alpha(t-s)$  is true.

If the information flow pretends to be a periodic sequence of packets of limited length, the function  $R(t)$  is a ‘step’ function. The input curve for a function of this kind is the function  $\gamma_{r,b}(t) = rt + b$ , where  $r$  is the average flow rate,  $b$  is the maximum packet size.

In addition to the input curve, which is a ‘representative’ of the flow function, the Network Calculus method in each network node considers a service curve (service curve), which describes the amount of processed information in the node to a given point in time.

Consider a situation in which a node processes information at a constant speed  $R$  (usually this speed corresponds to the bandwidth of the communication line at the output of the node), but before process-

ing introduces some delay limited by time  $T$  (usually this time corresponds to the maximum technological delays in the delivery of information within the node from input to output). In this case, the serving curve at this node is equal to  $\beta_{R,T}(t) = \max \{0, R(t-T)\}$ .

The maximum delay that the information from the stream with the input curve  $\alpha$  receives in the node that provides the service curve  $\sigma$ , is estimated from above by the value of the maximum horizontal (ie on the axis 'time') deviation from  $\alpha$  to  $\sigma$ . For the case  $\alpha = \gamma_{r,b}$  and  $\sigma = \beta_{R,T}$  the size of the maximum delay is equal to  $T + b/R$ .

The maximum amount of raw information from the stream with the input curve  $\alpha$  in the node that provides the service curve  $\sigma$  is estimated from above by the value of the maximum vertical (ie along the axis 'information') deviation from  $\alpha$  to  $\sigma$ . For the case  $\alpha = \gamma_{r,b}$  and  $\sigma = \beta_{R,T}$  the maximum amount of raw information is equal to  $\gamma_{r,b}(T) = b + rT$ .

The use of coarsening in the form of incoming curves instead of flow functions leads to the fact that as the packet passes through the nodes of the network, the input curve becomes more 'rough'. In particular, for the case where the node input curve for the input stream is  $\alpha = \gamma_{r,b}$  and the serving curve is equal to  $\sigma = \beta_{R,T}$  the input curve for the output stream (it will be the input curve for the input flow of the next node on the path of this packet) is equal to  $\gamma_{r,b+rT}$ , ie as the packet of network nodes passes, the second parameter of the function  $\gamma$  increases, so that on subsequent nodes, respectively, estimates of delay time and the amount of raw information increase.

If we compare Network Calculus and Trajectory with each other, we can not say about the clear advantage of one of the methods. Although in many cases Trajectory gives more accurate estimates of the worst time than Network Calculus, there are network configurations where the opposite is true.

**Dynamic behavioral analysis.** Dynamic analysis of behavior allows to obtain less pessimistic estimates of behavioral characteristics, compared with static analysis. In addition, sometimes the use of dynamic analysis allows the analysis in cases where it is statically impossible to perform or it requires too many resources (too much complexity of the model is difficult and difficult to analyze the mathematical description of components, combinatorial explosion, etc.). However, it should be borne in mind that dynamic analysis is performed in a specific performance, not in the worst case, and requires a specific context of work: input data and impacts [18].

Dynamic behavioral analysis requires that the behavior of the components be specified in the model in some executive way. For the correct use of feasible models, it is important to organize work with model time, with the transfer of information and events within the model.

This problem is well solved using a discrete-effective approach to behavior modeling. In this approach, the work of the component is presented as a set of 'events' – acts of action to change the state of objects and interact with other components and the outside world at certain points in time.

This approach has proven to be the most suitable for modeling the behavior of computer systems, which are complex of onboard equipment IMA systems. On the one hand, it is quite powerful for modeling such systems, on the other hand, this approach is much easier to apply (in contrast to the even more powerful approach of continuous simulation, which faces the solution of nonlinear differential equations and used in modeling physical processes).

To support the discrete-event paradigm of behavior description, the MASIW tool has implemented a library that supports stimulation time and provides processing of events arising from the simulation system, and synchronous and asynchronous data transmission. To ensure these possibilities, a continuations programming approach was used, supported by the Matthias Mann's continuations library.

The AADL language has its own means of describing behavioral semantics for some elements of the model. However, these tools are not enough to describe the behavior of applications, devices and other complex components of the model. There are standardized extensions of AADL – Behavioral Model Annex [19] and BLESS – that allow you to describe the behavior of model components based on finite state machines that work with time and events.

At the moment in the MASIW tool the feasible model of behavior is set in Java language. This allowed us to quickly implement support for dynamic behavioral analysis of AADL models, and at the moment the tool can already be used for such analysis. However it is necessary to put behavior of components in a non-standard way. On the other hand, the use of Java will allow in the future to implement translators from standard behavior task languages without the need to rework the part responsible for the actual dynamic analysis.

As mentioned earlier, it is often advisable to conduct an early analysis of the system on incomplete models. In such models, some components do not yet have a detailed description, and often there are only some assumptions about how they behave in this system. In this case, the analysis can be performed by recording the assumptions in the form of a particular behavior of the components. The MASIW tool supports a special method of parameterizing the model, which simplifies the description of different assumptions about the components for different variants of model analysis.

**Dynamic structural analysis.** This type of analysis is required for reconfigured systems, ie for sys-



tems whose structure may change during operation. In the general case, there may be a dependence of the model structure on the input influences or the environment of the modeled system, so it is not always possible to statically analyze the implementation of all necessary structural constraints.

In its pure form, dynamic structural analysis involves verifying that all achievable states of the architectural model are structurally correct, ie meet the requirements for the correctness of the structure of the model. To check the properties of the model structure obtained at any time during the execution of the model, you need to get the changed structure and run checks on the new model. This check is similar to a static structural check, the input of which is fed to the model obtained in the dynamics. The difficulty here is that you do not always need to check all the properties in all states, but you need to specify in some way which checks to perform at what time.

Dynamic structural analysis can also check the properties that are set not on one state of the model structure, but on the sequence of such states, although such analysis is rather an analysis of the behavioral aspect of the functionality for reconfiguring the system.

Traditionally, among the properties of objects over time, there are safety properties and survivability properties. The former require that something never happen, while the latter require that something ever happen. An example of a security property is the requirement that immediately after the occurrence of event X, a given component A will have a sub-component B, and the survivability properties – the requirement that after the occurrence of event X, a given component A will sooner or later have a sub-component B.

The already considered requirement of structural correctness of all achievable states is the simplest example of a safety property. Dynamic verification of more complex security properties can be implemented on similar principles, given that part of the information used in the static structural analysis of the fixed state of the architectural model should be calculated based on the properties of previous states of the model.

Checking the survivability properties is a significantly different task. The main feature of these properties is that they are violated only at infinity. Therefore, the task of verifying such properties cannot be solved by pure dynamic analysis and requires the development of special tools.

**Automatic synthesis of models.** The designer of the IMA system has a task to build an architecture that must meet the requirements of different types: the adequacy of hardware resources, fault tolerance, reliability, security of the system as a whole, limiting the maximum allowable time for delivery of mes-

sages between components, requirements for timely functions etc.

To a certain extent, the art of experienced specialists, armed in addition with the tools of verification of the constructed architectural model, allows to solve such a problem. However, this approach has limited scalability and high subjectivity. System design automation tools that meet a set of requirements and constraints can make designers work much more efficiently.

In many cases, individual parts of the model can be automatically synthesized based on the information contained in another ('source') part of the model, which describes the basic logical relationships between the components and the requirements for the resulting architecture. In this case, the development of the original part of the model is much easier than the development of the corresponding synthesized part. In addition, the source part in any case must be described in the design process. For example, based on the source information about the available set of applications and their hardware requirements, as well as information about the architecture and capabilities of computing modules, it is possible to automatically synthesize the binding of applications to these modules to meet all resource adequacy and scheduling requirements.

The MASIW design environment offers the following work scenario for developing a model of the designed system. The designer develops the necessary source part of the model, then launches an automatic synthesis algorithm, which based on the available information contained in the source part of the model, completes the architecture model with new parts, which can be adjusted manually or regenerated if the original part of the model is updated.

**Automatic synthesis of schedules for strictly periodic tasks.** When dividing hardware resources between several applications, one of the most important aspects is the timely provision of CPU resources for all tasks in the system. This aspect is usually dealt with by a special operating system task scheduling subsystem, which allocates CPU time to functional applications based on a pre-prepared schedule.

As initial data in the task of construction of the schedule for each of periodic tasks are set:

- 1) task start period;
- 2) task execution time on one start-up period.

Classical algorithms for scheduling periodic tasks work only when the start time of the task within the period is allowed to vary at different periods of its execution. However, there is currently a need to compile schedules in which the time between adjacent launches of one periodic task would be fixed and equal to the length of the period. This additional requirement of strict periodicity does not allow the use of classical planning algorithms in the scheduler.

The main difficulty of the algorithm for planning strictly periodic tasks is the search for starting points for all tasks, so that it was possible to build the actual schedule. This search is an NP-complete task.

In addition, we use the strategy of finding starting points implies a search in the first place of such options that provide the longest possible continuous execution of the first ticks after starting each task.

In general, this approach allows you to quickly get a solution to the problem of scheduling for strictly periodic problems [20].

***Automatic synthesis of IMA system architecture.***

As initial data in the problem of synthesis of architecture of IMA the following are set:

- functional applications and logical data flows between them, as well as between applications and sensors / actuators;
- a set of needs for functional applications to hardware resources (memory, computing power, etc.);
- a set of requirements for the maximum time of delivery / processing of messages in logical data streams;
- a set of available hardware components (computing modules, switches, etc.) in conjunction with a description of their capabilities and limitations on the scope of their permissible use (usage domain rules).

You need to automatically build the architecture of the IMA system, which includes:

- composition and communication of hardware components;
- placement of functions on computing modules;
- details of the organization of connections in the AFDX-network;
- work schedule of application and system partitions ARINC-653 compatible operating systems.

The system architecture must meet all safety and performance requirements.

The synthesis task is divided into two major subtasks:

- 1) placement of applications from computing modules so that it was possible to build a schedule on each module;
- 2) assignment of virtual channels between computing modules and distribution of switches on virtual channels so as to meet the requirements for message delivery time.

The solution of the first problem is based on the consideration of the set of periods of application launch and on the application of numerical reasoning, which allow to divide the set of periods into such subsets that for each obtained subset there are guaranteed starting points of the corresponding applications [21; 22].

The solution of the second problem is based on the use of genetic algorithms, at each step of the genetic algorithm is built a population consisting of N correct topologies of the AFDX-network. Each

topology of the new population is obtained either as a result of a small modification (mutation) of some topology of the previous population, or as a result of crossing some two topologies of the previous population. When crossing, the resulting topology receives the maximum number of common properties (in the sense of connecting components together), which are in both source topologies.

After the next population is constructed, the incoming topologies are ranked in such a way that N topologies that best meet the requirements for message delivery time are selected for further construction. Static methods (Trajectory, Network Calculus) are used to estimate the delivery times obtained in this topology, and the main component of the ranking function looks like this:

$$\sum e^{T-\tau},$$

where the summation is performed on all channels for which the delivery time limit is set, T is the delivery time for this channel in this topology,  $\tau$  is the specified maximum delivery time for this channel.

**Development prospects.** At the moment, the MASIW tool allows to perform only part of the tasks assigned to the system integration group and further plans to expand the functionality of its functionality in many areas.

In the context of static structural analysis of models, the main direction of development is the development of a full-featured language for describing constraints on the structure of an architectural model convenient for a compact description of both global and component constraints. In our opinion, this language should be based on one of the well-known existing programming languages in order to be able to reuse ready-made libraries with a variety of functionality and simplify the task of training engineers. A good contender for the role of such a language is the Python language, which due to the concept of decorators provides an opportunity to form a specialized language based on standard syntax, which means the ability to use the existing interpreter and other tools unchanged for a new language. Other promising areas are the development of libraries of ready-made parts of the code for their reuse in checking the conditions of correctness and the implementation of static structural analysis of reconfigured systems [23; 24].

In the context of static behavioral analysis of models, a promising area of development of supported analysis methods is the analysis of data transmission in the system as a whole, and not only within the AFDX network. The main difficulty here is to take into account the behavior of all components of the gateways located between the sender / recipient of the message and the AFDX network.

In the context of dynamic behavioral analysis of models, the main direction of development is to support standard ways of setting behavior for the



components of the model (Behavioral Model Annex, BLESS). Another very important area of development of this type of analysis is the implementation of the possibility of using the simulator in combination with a stand of semi-natural modeling and in combination with external emulators of hardware platforms. This will save time on developing detailed models for existing system components that are available for use on the stand or in a virtual environment, which reduces the total time and cost of preparation for testing the model.

In the direction of dynamic static analysis of models, only research work has been carried out, so the implementation and conduct of experiments with this method of analysis is another task for the future development of the functionality of the tool.

In the context of automatic synthesis of models promising areas of development are the support of new types of constraints on the synthesized model, research methods of incremental synthesis of architecture and automatic updating of the model when changing the initial requirements taking into account manual modifications of previous synthesized models. The degree of criticality of each function ensured the smooth operation of the entire system, provided the possibility of failure of individual components.

Another area for the development of MASIW tools is the generation of documentation describing the architecture of the BWW system, as well as the generation of project templates and source code of functional applications that would already include typical functions such as message processing whose structure is already described in the architectural model.

**Conclusions.** The complexity of modern aviation systems and high requirements for their reliability lead to the need to use shared resources (IMA architecture). When creating IMA systems, developers (in particular, system integrators) face a number of tasks and problems that they have not encountered before. To solve these problems come to the aid of various automation tools and computer development support. The development of this area is primarily associated with the use of various models, including architec-

tural models of software and hardware systems. The corresponding group of technologies is called Model Driven System Engineering (MDSE).

The implementation of MDSE technologies requires serious research and well-thought-out engineering solutions. One of the sources of complexity in the development and implementation of MDSE is the need to take into account the needs and preferences of different groups of professionals, as models are used both as input for synthesis and verification, as a design tool and as a means of communication and cooperation. This article is devoted to the methods and tools for solving these problems. The article pays special attention to the issues of integration of methods of formal specification and formal analysis of avionics models with methods of design, implementation and integration of avionics systems, which were developed in this field earlier.

The MASIW tool simplifies the solution of a number of tasks related to the development of aviation systems. It allows you to conveniently and clearly create and edit models of such systems in AADL, as well as analyze such models for compliance with various requirements related to both the structure and behavior of the model (calculate various temporal characteristics, predict the behavior of the simulated system in different situations, including non-standard behavior of components and failures within the system).

In addition, MASIW facilitates architecture design through the implementation of a number of model synthesis algorithms. This allows, in particular, to distribute the tasks on the computing units so that each task was allocated enough CPU time, and to generate an on-board network model and network resource allocation scheme according to the needs of system components.

The MASIW tool is constantly evolving. This development is based on close cooperation with customers, potential users and with the international community of developers of open standards and open tools to support the development, integration and verification of responsible systems based on the use of modeling tools.

## BIBLIOGRAPHY

1. Hayley J., Reynolds R., Lokhande K., Kuffner M. and Yenson S. (2012) Human-Systems Integration and Air Traffic, *Control Lincoln laboratory journal*, no. 19(1), pp. 34-49.
2. Parkinson P. and Kinnan L. (2015) Safety-Critical Software Development for Integrated Modular Avionics, *Wind River*, vol. 11, no. 2.
3. Tiedeman H. and Parkinson P. (2019) Experiences of Civil Certification of Multi-Core Processing, *Systems in Commercial and Military Avionics Integration Activities*, vol. 1(2) pp. 419–428. doi: <https://doi.org/10.3182/20110828-6-it-1002.01501>.
4. Ghannem A., Hamdi M., Kessentini M. and Ammar H. (2017) Search-based requirements traceability recovery: A multi-objective approach, *Proc. IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pp. 1183–1190. doi: <https://ieeexplore.ieee.org/document/7969440>.
5. Neretin E. (2019) *J. Phys.: Conf. Ser. 1353 012005*. doi: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1353/1/012005>.

6. Road vehicles – Controller area network (CAN) – Part 1: Data link layer and physical signaling.
7. Road vehicles – Controller area network (CAN) – Part 2: High-speed medium access unit.
8. Murphy B. and Wakefield A. (2009) *Early verification and validation using model-based design The MathWorks*.
9. SAE International Architecture Analysis & Design Language (AADL).
10. The ATESST Consortium 2010 East-adl 2.0 specification. URL : <http://www.atesst.org>.
11. ISO/IEC 19505-1:2012 Object Management Group Unified Modeling Language (OMG UML).
12. Object Management Group (OMG) Systems Modeling Language SysML, Version 1.3.
13. Object Management Group (OMG) UML Profile for MARTE: Modeling and Analysis of Real-Time Embedded systems, Version 1.1.
14. De Niz D (2007) *Diagrams and Languages for Model-Based Software Engineering of Embedded Systems: UML and AADL, SEI*.
15. Gilles O. and Hugues J. (2010) Expressing and Enforcing User-Defined Constraints of AADL Models, *Engineering of Complex Computer Systems (ICECCS)*.
16. URL : [https://wiki.sei.cmu.edu/aadl/index.php/Osate\\_2\\_Lute](https://wiki.sei.cmu.edu/aadl/index.php/Osate_2_Lute).
17. Martin S. and Minet P. (2006) Schedulability analysis of flows scheduled with FIFO: application to the expedited forwarding class, *Parallel and Distributed Processing Symposium*.
18. URL : <http://www.matthiasmann.de/content/view/24/26/>.
19. AS5506/2 SAE Architecture Analysis and Design Language (AADL) Annex Volume 2.
20. Zelenov S. (2011) Планирование строго периодических задач в режиме реального времени, *Труды ИСП РАН*, Т. 20.
21. Konakhovych H., Kozlyuk I., Kovalenko Y. (2020) Specificity of optimization of performance indicators of technical operation and updating of radio electronic systems of aircraft, *System research and information technologies*, no. 3, pp. 41-54.
22. Kovalenko Y., Konakhovych H., Kozlyuk I. (2020) Specificity of optimization of performance indicators of technical operation and updating of radio electronic systems of aircraft. *International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA)*, vol. 10 (09), pp. 48-58.
23. Kozlyuk I., Kovalenko Y. (2020) Functional bases of the software development and operation in avionics. *Problems of Informatization and Management*, no. 63, pp. 49-63.
24. Коваленко Ю.Б., Козлюк І.О. Реалізація програмного комплексу розроблення додатка інтегрованої модульної авіоніки за стандартом ARINC653, *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2020. № 2. С. 27–35.

## REFERENCES

1. Hayley J., Reynolds R., Lokhande K., Kuffner M. and Yenson S. (2012) Human-Systems Integration and Air Traffic, *Control Lincoln laboratory journal*, no. 19(1), pp. 34-49.
2. Parkinson P. and Kinnan L. (2015) Safety-Critical Software Development for Integrated Modular Avionics, *Wind River*, vol. 11, no. 2.
3. Tiedeman H. and Parkinson P. (2019) Experiences of Civil Certification of Multi-Core Processing, *Systems in Commercial and Military Avionics Integration Activities*, vol. 1(2) pp. 419-428. doi: <https://doi.org/10.3182/20110828-6-it-1002.01501>.
4. Ghannem A., Hamdi M., Kessentini M. and Ammar H. (2017) Search-based requirements traceability recovery: A multi-objective approach, *Proc. IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pp. 1183-1190. doi: <https://ieeexplore.ieee.org/document/7969440>.
5. Neretin E. (2019) *J. Phys.: Conf. Ser. 1353 012005*. doi: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1353/1/012005>.
6. Road vehicles – Controller area network (CAN) – Part 1: Data link layer and physical signaling.
7. Road vehicles – Controller area network (CAN) – Part 2: High-speed medium access unit.
8. Murphy B. and Wakefield A. (2009) *Early verification and validation using model-based design The MathWorks*.
9. SAE International Architecture Analysis & Design Language (AADL).
10. The ATESST Consortium 2010 East-adl 2.0 specification. [Electronic resource] Online: <http://www.atesst.org>.
11. ISO/IEC 19505-1:2012 Object Management Group Unified Modeling Language (OMG UML).
12. Object Management Group (OMG) Systems Modeling Language SysML, Version 1.3.
13. Object Management Group (OMG) UML Profile for MARTE: Modeling and Analysis of Real-Time Embedded systems, Version 1.1.

14. De Niz D (2007) *Diagrams and Languages for Model-Based Software Engineering of Embedded Systems: UML and AADL, SEI*.
15. Gilles O. and Hugues J. (2010) Expressing and Enforcing User-Defined Constraints of AADL Models, *Engineering of Complex Computer Systems (ICECCS)*.
16. [Electronic resource] Online: [https://wiki.sei.cmu.edu/aadl/index.php/Osate\\_2\\_Lute](https://wiki.sei.cmu.edu/aadl/index.php/Osate_2_Lute).
17. Martin S. and Minet P. (2006) Schedulability analysis of flows scheduled with FIFO: application to the expedited forwarding class, *Parallel and Distributed Processing Symposium*.
18. [Electronic resource] Online: <http://www.matthiasmann.de/content/view/24/26/>.
19. AS5506/2 SAE Architecture Analysis and Design Language (AADL) Annex Volume 2.
20. Zelenov S. (2011) Planirovanie strogo periodicheskikh zadach v sistemah real'nogo vremeni, *Trudy ISP RAN* vol. 20 (in Russ.).
21. Konakhovych H., Kozlyuk I., Kovalenko Y. (2020) Specificity of optimization of performance indicators of technical operation and updating of radio electronic systems of aircraft, *System research and information technologies*, no. 3, pp. 41-54.
22. Kovalenko Y., Konakhovych H., Kozlyuk I. (2020) Specificity of optimization of performance indicators of technical operation and updating of radio electronic systems of aircraft. *International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA)*, vol. 10 (09), pp. 48-58.
23. Kozlyuk I., Kovalenko Y. (2020) Functional bases of the software development and operation in avionics. *Problems of Informatization and Management*, no. 63, pp. 49-63.
24. Kovalenko Y., Kozlyuk I. (2020) Implementation of the integrated modular avionics application development complex according to the ARINC653 standard, *The Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and mathematical Sciences*, no. 2, pp. 27-35.

## ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У ЗБІРНИКУ НАУКОВИХ ПРАЦЬ «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

### Вимоги до оформлення статей:

До друку приймаються статті, що мають наукову і практичну цінність. Автор має право представити тільки одну наукову статтю в один номер, яка раніше не публікувалася. Автор несе відповідальність за оригінальність тексту статті, точність наведених фактів, цитат, статистичних даних, власних назв, географічних назв та інших відомостей, а також за те, що в матеріалах не містяться дані, що не підлягають відкритій публікації. Редакція не несе відповідальності за викладену в статті інформацію. Остаточне рішення про публікацію ухвалюється редакцією, яка також залишає за собою право на додаткове рецензування, редагування і відхилення статей.

### Технічні вимоги:

- до друку приймаються статті українською, російською та англійською мовами;
- електронний варіант статті у форматі **\*.doc**, **\*.docx** або **\*.rtf**, підготовлений у текстовому редакторі Microsoft Word;
- формат А4 через 1,5 інтервал;
- шрифт Times New Roman, розмір 14;
- поля: ліве – 3 см, праве – 1,5 см, верхнє, нижнє – 2 см.

### Структура статті:

- рядок 1** – УДК (вирівнювання по лівому краю);
- рядок 2** – назва тематичного розділу (вирівнювання по лівому краю);
- рядок 3** – назва статті (вирівнювання по центру, напівжирний шрифт, великі літери);
- рядок 4** – прізвище та ініціали автора статті; науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри (вирівнювання по центру);
- рядок 5** – місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора (вирівнювання по центру).

Якщо автор не має orcid-коду, його можна отримати за посиланням <https://orcid.org/>

**абзац 1** – розширена анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані мовою, як і уся стаття;

**абзац 2** – назва статті (напівжирний шрифт, усі літери великі), прізвище, ініціали автора, науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри, місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора, **розширена** анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані **англійською мовою**. Переклад англійською мовою повинен бути достовірним (не машинним).

У випадку, якщо стаття не українською мовою, обов'язково подаються назва статті (напівжирний шрифт, усі літери великі), прізвище, ініціали автора, науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри, місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора, розширена анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані українською мовою.

Основний текст статті повинен відповідати структурі IMRAD (Introduction, Methods, Results, and Discussion) + Literature Review:

Вступ – короткий вступ (1-2 сторінки), який повинен дати відповіді на запитання «чому проведено дослідження?», «які об'єкт, мета й основні гіпотези дослідження?»; Огляд літератури - розділ, що містить аналіз останніх публікацій за темою дослідження (переважна більшість публікацій повинна бути за останні 5 років, самоцитування не більше 30% від кількості літературних джерел), з огляду літератури читачі повинні мати змогу оцінити стан проблеми у світі, аналіз літературних джерел повинен мати критичний характер;

Методи – розділ, який може включати 2-3 рівнозначних за обсягом параграфи, що висвітлюють основні методи, підходи, алгоритми дослідження;

Результати – розділ, який містить аналіз основних результатів дослідження (графіки, таблиці з чисельними даними, загалом, результати обчислювальних експериментів); Дискусія – розділ (до 1 сторінки), який також можна назвати Висновок або Висновки, що містить порівняння отриманих результатів з результатами інших досліджень (як власних так інших авторів), а також дає відповідь на запитання «які перспективи дослідження?», формулює наукову новизну результатів.

Література розміщується після статті у порядку згадування; друкується через 1,5 інтервал, 14 розміром, шрифтом Times New Roman і оформляється у відповідності вимог міждержавного стандарту ДСТУ 8302:2015.

Посилання на літературу в тексті слід давати в квадратних дужках, наприклад, [2, с. 25; 5, с. 33], в яких перша цифра вказує порядковий номер джерела в списку літератури, а друга – відповідну сторінку в цьому джерелі; одне джерело (без сторінок) відокремлюється від іншого крапкою з комою [3; 4; 6; 8; 12; 15].

Наприкінці статті розміщується транслітерована і перекладена англійською версія літератури (References), оформлена згідно з вимогами APA (American Psychological Association).

**Порядок подання матеріалів:**

Для публікації статті у фаховому науковому виданні необхідно надіслати на електронну адресу редакції editor@physmath.journalsofznu.zp.ua наступні матеріали:

**добре вчитану наукову статтю**, обов'язково оформлену відповідно до вказаних вимог;  
**інформаційну довідку про автора**;  
відскановане **підтвердження сплати коштів** (реквізити для сплати надаються автору після вдалого проходження рецензування).

*Зразок оформлення назви електронних файлів:* Іванов\_І.І.\_стаття, Іванов\_І.І.\_оплата.

**Адреса та контактні дані:**

Редакція збірника наукових праць «Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки»

вул. Жуковського 66, корп. 1, ауд. 216, м. Запоріжжя, Україна, 69060

**Телефон:** +38 (066) 53 57 687

**Електронна пошта:** editor@physmath.journalsofznu.zp.ua

**Офіційний сайт:** www.journalsofznu.zp.ua/index.php/phys-math



Збірник наукових праць

**ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ.  
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ**

№ 1, 2021

Комп'ютерна верстка – Н.С. Кузнєцова  
Коректура – В.В. Ізак

Підписано до друку: 24.06.2021.  
Формат 60x84/8. Гарнітура Times New Roman.  
Папір офсет. Цифровий друк. Ум. друк. арк. 13,72.  
Замов. № 0721/250. Наклад 100 прим.

Видавництво і друкарня – Видавничий дім «Гельветика»  
69063, Україна, м. Запоріжжя, вул. Олександрівська, 84, оф. 414  
Телефони: +38 (048) 709 38 69, +38 (095) 934 48 28, +38 (097) 723 06 08  
E-mail: [mailbox@helvetica.ua](mailto:mailbox@helvetica.ua)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 6424 від 04.10.2018 р.